Verstärkt konstruieren - neben dem Modellieren!

Geometrieunterricht mit einem dynamischen 3D-Programm – Möglichkeiten und Impulse
Von Thomas Müller, Krems

Seit Beginn dieses Jahres ist CABRI 3D am Markt verfügbar!
In vorliegendem Aufsatz geht es nicht (nur) um dieses Programm; endlich kann verdeutlicht und praktisch getestet werden, welchen Nutzen eine dynamische 3D-Software für unsere Fächer bringen kann. Diese neue Software kann die didaktischen Ansätze und die Methodik des Unterrichtsgegenstandes Darstellende Geometrie (und von Geometrischem Zeichnen) vor allem in der AHS nachhaltig beeinflussen. In einzelnen Blitzlichtern auf Unterrichtsbausteine aus dem traditionellen Unterricht der Darstellenden Geometrie soll dies deutlich gemacht werden. Die im Umlauf befindlichen didaktisch ausgerichteten CAD-Programme (etwa CAD-3D, GAM) eignen sich ja hervorragend auf das Darstellen von Objekten, eben das Modellieren samt all seinen Problemstellungen. Die meisten Grund- und Aufrisskonstruktionen werden – so wagt der Autor zu behaupten den Anwendungen der dynamischen 3D-Programme weiche. Dies lässt sich schon jetzt – einige Monate nach Erscheinen dieses ersten auf den Unterricht ausgerichteten dynamischen 3D-Programmes und nach dem ersten Ausloten der Möglichkeiten aussagen. In Form von 7 Bausteinen für den Unterricht werden Möglichkeiten des sinnvollen Einsatzes aufgezeigt. Ein kurzer technischer Ausblick schließt die Ausführungen ab.

Es gibt eine neue Software – wieder einmal, werden manche sagen. Zuerst CAD-2D, SchulCAD oder PC-DESIGN und DOS- bzw. WinDOSCAD, dann CAD-3D oder GAM, nun will/soll man MICROSTATION lernen … und jetzt kommt **noch ein Programm** dazu?
Ja, aber die Einarbeitungszeit geht hier praktisch gegen Null!

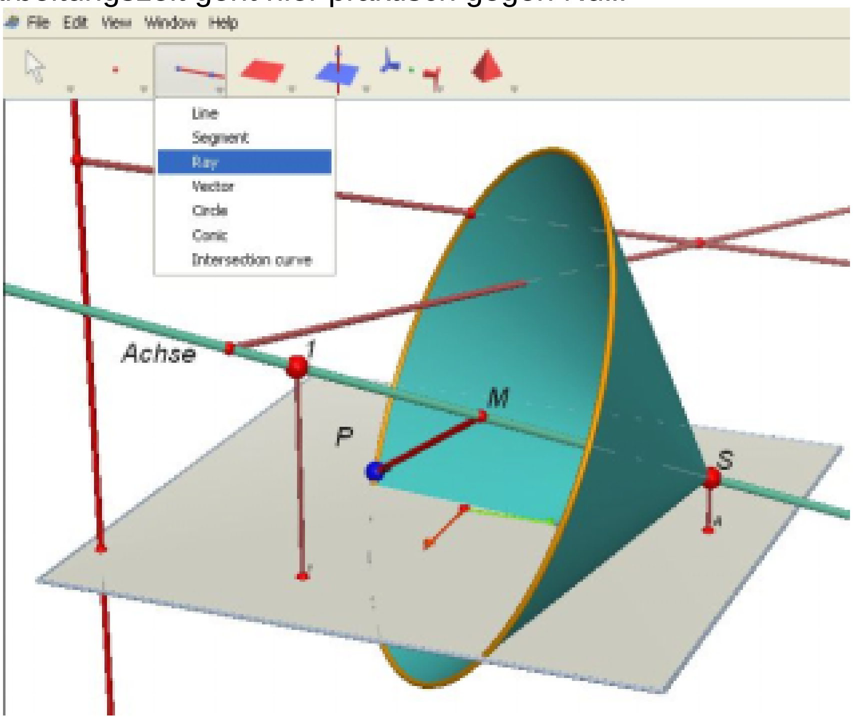


Abb. 01: Die Konstruktionen werden nach Eintragen der Grundelemente durchgeführt. Derzeit stehen folgende Angabeelemente zur Verfügung: Punkt, Gerade, Strecke, Kreis, Kegelschnitt, … Ebene, Zylinder, Kegel, Kugel, … alle Platonischen Körper … Ein übersichtliches Menü gestattet ein angenehmes und einfaches Zeichnen, die Eigenschaften aller Elemente kann man – ganz windowskonform – durch Klick mit der rechten Maustaste ansehen und ändern: Farbe, Strichart, Liniendicke, Oberflächengestaltung, Sichtbarkeit, …   An Raumtransformationen stehen Schiebungen, Spiegelungen und Drehungen zur Verfügung. Gedrückte rechte Maustaste verändert bei Bewegung die Ansicht in Echtzeit.

In „Die Geometrie auf ihrem Weg zur Dynametrie“ [Müller 2003] hat der Autor ebene dynamische Programme verglichen und zum Abschluss seiner Hoffnung Ausdruck verliehen, in Zukunft ein „einfaches – nicht überladenes 3D-dynamisches Geometrieprogramm“ zu erhalten. Schneller als erwartet ist dieser Wunsch Wirklichkeit geworden!

CABRI 3D wurde ebenso wie das legendäre Cabri II an der Joseph Fourier Universität in Grenoble in Frankreich entwickelt und zwar von Eric Bainville und Jean-Marie Laborde innerhalb der CABRILOG-Company, die vom Entwickler der ersten dynamischen Geometriesoftware CABRI Jean-Marie Laborde und von Max Marcadet (ex-IBM Management Consultant) gegründet worden ist.

Das sehr übungsintensive händische Konstruieren vor allem im Grund– und Aufrissverfahren wird damit vermutlich endgültig der Vergangenheit angehören. Und das Schöne für uns Lehrenden: Die echte Denkarbeit, die raumbezogenen Überlegungen bleiben bei den Lernenden.

Die folgenden Ausführungen sind ein Plädoyer dafür, die oftmals sehr abstrakt und nur theoretisch vorgetragenen Beispiele anwendungsorientiert zu verpacken. So wie der Ton die Musik im zwischenmenschlichen Miteinander macht, so kann die gute Verpackung eines Produktes wesentlich zum Erfolg - in diesem Fall „unseres“ Geometrieunterrichtes - beitragen.

Freude und Wehmut

Die letzten Jahre waren für die konstruktiv-darstellenden GeometerInnen einerseits eine Freude – Modellieren ohne Ende und ohne Schranken - andererseits kam eine gewisse Wehmut auf. So manche liebgewordenen Inhalte waren weggefallen, vor allem eine ganze Klasse traditioneller Konstruktionen, weggefallen aus mehreren Gründen:

1. Die didaktischen Modellierprogramme konnten nicht damit umgehen.
2. Den Lehrer/innen blieb durch Stundenreduktion und die Mehrstunden in den EDV-Räumen nur noch ganz wenig Zeit, den SchülerInnen den Umgang mit dem klassischen „Handwerkszeug“, umfangreichen Grund- und Aufrisskonstruktionen zu lehren. Die Übung und die Fertigkeit fehlten –ebenso wie zum Teil die Motivation - und somit mussten viele dieser mehr oder weniger abstrakten Denkübungen (im Raum?) einfach ersatzlos gestrichen werden.
3. Die vermehrte Verwendung von Konstruktionen in Parallelrissen ließen automatisch viele Konstruktionen aus der fast ausschließlichen „Normalrisszeit“ einfach nicht mehr zu.

Mit CABRI 3D gibt es nun eine erste dynamische 3D-Software für unsere Fächer GZ und DG, die die eigentliche Zeichenarbeit bei den „reinen“ Konstruktionen abnimmt, das Nachdenken und Überlegen eines möglichen oder günstigen Konstruktionsablaufes im Raum aber nicht. Laut neuem Lehrplan für AHS/DG, der im Schuljahr 2006/07 in den 7. Klassen wirksam werden wird, steht die **Sachkompetenz** im Vordergrund, wie das Verstehen räumlicher Zusammenhänge oder das Lösen räumlicher Problemstellungen. Genau hier hat die dynamische 3D-Software ihren Platz, ob es nun CABRI 3D oder ein anderes in Zukunft erscheinendes Produkt ist. Im Anschluss wird eine Reihe von solchen räumlichen Problemstellungen erläutert. Zur ebenfalls im neuen Lehrplan geforderten **Methodenkompetenz** gehören das – oft auswendig gelernte - „Liniieren“ im Grund- und Aufrissverfahren sowie die Hilfskonstruktionen, die über Hauptgeraden oder Spuren, über Fallgeraden oder Deckgeraden gelaufen waren, wohl auch nicht. Die **Selbstkompetenz** wie die Fähigkeit im strukturierten Denken oder der Kreativität wird durch das mögliche weitgehend selbstständige Arbeiten der Lernenden im Umgang mit dieser Software enorm gesteigert.

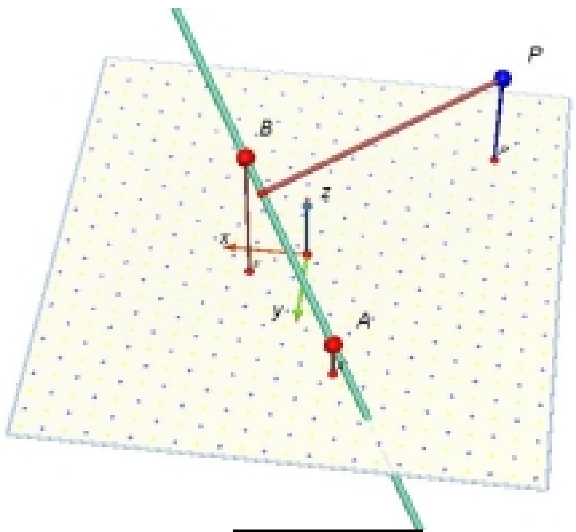
Neue Möglichkeiten in der Methodik

Ein erstes Beispiel [Baustein 01]

Schon die erste einfache Konstruktion zeigt den enormen Vorteil der **dynamischen Variabilität** der Angabeelemente. Diese Konstruktion ist aus dem Standardrepertoire der Anfangsgründe der Darstellenden Geometrie. Es geht um die Ermittlung des kürzesten Abstandes eines Punktes von einer Geraden. Einkleidungen für diese Aufgabe gibt es bekanntlich viele, vom kürzesten Abstand zu einer Stromleitung, einem Bergwerksstollen, von einer in der Erde vergrabenen Gas- oder Wasserleitung, … Und so sollte es an der Motivation, die Lösung dieser Aufgabe auch konstruktiv zu bewältigen, nicht fehlen! Außerdem steht ja jeder Berechnung, bei jeder Formel, die zum Beispiel im Mathematikunterricht entwickelt wird, am Anfang zumindest eine Skizze Pate. Jetzt besteht die Möglichkeit, diese Skizzen und Überlegungen, die aufgrund des Zeitmangels im Unterricht der Darstellenden Geometrie vielleicht nicht mehr konkret und „exakt“ (in den Normalrissen) durchkonstruiert worden sind, tatsächlich durchführen zu lassen – und das noch dazu dynamisch. Dynamisch heißt, dass alle Angabeelemente - hier der Punkt P oder die Gerade (AB) - stetig verändert werden können und sich die Lösung der Angabe zeitgleich anpasst. Und worin besteht der Vorteil dieser dynamischen Variabilität der Angabeelemente! Ganz gewiss Auftauchen von Fragestellungen, die bisher in der Praxis zu nicht durchführbaren Konstruktionen geführt hätten, etwa:

- Was passiert mit dem Normalenfußpunkt, wenn der Punkt P auf der eingegetragenen z-Parallelen bewegt wird? Bilden diese Normalabstände dann ein Fläche, wenn ja welche? Welche Kurve durchläuft der Normalenfußpunkt ☺? Ist diese „Kurve“ begrenzt? Gibt es unter diesen Normalenstrecken eine kürzeste?
- Und was passiert mit dem Normalenfußpunkt, wenn P, A oder B auf z-Parallelen, Kreisen, Horizontalen, … geführt werden?

Das Finden solchen Fragestellungen und die Antworten darauf können einerseits ein vertiefendes Raumdenken und andererseits die Beweis- und Argumentationskultur gleich wie die Kreativität bei technisch-mathematischen Fragestellungen und deren Lösungen fördern.



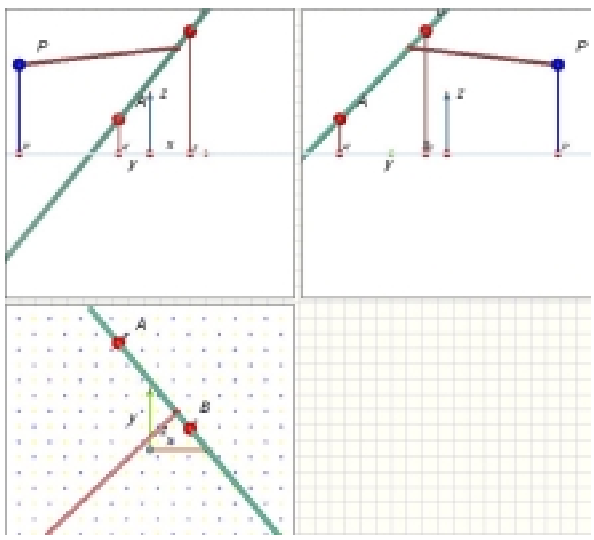


Abb. 02a und 02b, [Baustein 01] Die Zeichnung kann einfach in der vorgegebenen Standardansicht „Zentralriss“ erfolgen. Auf Wunsch können mehrere Fenster (siehe rechts) einschließlich Normalrisse nach europäischer oder amerikanischer Aufstellung eingeblendet werden.

Ein Vergleich von CABRI 3D mit CAD-3D und GAM

Die Veränderung in der Methodik wird nicht nur im Vergleich zum traditionellen „alten“ Handzeichnen in zugeordneten Normalrissen deutlich, sondern auch gegen die auf Modellierung ausgerichteten Progamme CAD-3D und GAM. Es sei nochmals die obige Aufgabe „Ermittlung des Abstandes Punkt-Gerade“ betrachtet:
Der Lehrer / die Lehrerin wird das Problem zunächst vermutlich mit Hilfe einer Modellbildung (etwa Abstand der Ecke eines Tisches von der Oberkante der Tafel) oder zumindest anhand einer instruktiven Skizze erläutern und den Konstruktionsablauf besprechen oder den Lösungsgang selbst finden lassen. Mindestens drei Lösungswege bieten sich an:

- Man könnte die durch den Punkt und die Gerade aufgespannte Ebene betrachten und hier das Problem nach Ermittlung der „wahren Größe“ sozusagen auf das „ebene Abstandproblem“ zurückführen.
- Als zweiter Weg bietet sich das „Projizierendmachen“ dieser Ebene an (entspricht dem Seitenrissverfahren).
- Der dritte Lösungsweg ist im „echt“ räumlichen Ansatz zu finden, bei dem man zunächst eine Normalebene auf die Gerade durch den Punkt festlegt und diese dann mit der Geraden zum Schnitt bringt. Der Abstand des Schnittpunktes vom Punkt ist der gesuchte Abstand Gerade-Punkt.

Um die Unterschiede deutlich zu machen wird die praktische Durchführung des dritten Weges konkret beschrieben. Und hier bemerkt man, dass es sich tatsächlich um „konstruktiv-darstellende Geometrie“ und nicht „nur“ einer rein „beschreibenden“ [1] entspricht.

Bisher: Traditionelles Zeichenwerkzeug: Papier und Bleistift, Ausführung im Anfangsunterricht nur in Grund- und Aufriss möglich	**CAD3D oder GAM** Computer (EDV-Raum/ Notebookklasse oder nur zu Hause), wahlweise im Parallel- oder Zentralriss oder (nicht so anschaulich) im Grund- und Aufriss.	**NEU: CABRI 3D** Computer (EDV-Raum-Notebookklasse oder nur zu Hause), wahlweise im Parallel- oder Zentralriss oder (nicht so anschaulich) im Grund- und Aufriss.
Beim exakten händischen Konstruieren ist aufgabenabhängig das Abbildungsverfahren für die praktische Durchführbarkeit entscheidend!	Die Wahl des Abbildungsverfahrens ist bei der Computervariante unbedeutend.	
1. Normalebene auf die Gerade durch den Punkt: dazu die Hauptgeraden in beiden Rissen unter Anwendung des Satzes vom rechten Winkel ermitteln. 2. Schnitt dieser Ebene mit der Geraden (etwa Deckgeradenprinzip oder Seitenriss), 3. Verbindungsstrecke einzeichnen, allenfalls tatsächlich die wahre Länge konstruieren (Differenzendreieck oder	GAM: Menüpunkt BEARBEITEN / MESSEN CAD 3D: Menüpunkt MESSEN / LÄNGEN Anklicken des Punktes und der Geraden, dann wird das Berechnungsergebnis angezeigt Möglich wäre auch: Benutzerdefiniertes Koordinatensystem (entspricht etwa dem händischen Seitenrissverfahren)	Normalebene auf die Gerade durch den Punkt, Schnitt dieser Ebene mit der Geraden, Verbindungsstrecke einzeichnen, allenfalls tatsächlich die wahre Länge einzeichnen (Maßzahlanzeige ist bei der derzeitigen Version 1.03 noch nicht möglich) … **eigentlich die gleiche Vorgangsweise** wie bei der bisherigen händischen Ausführung, **der Detailaufwand fällt weg**, es sind nun

[1] Ich bitte den Leser / die Leserin den Ausdruck zu entschuldigen - „Blah-Blah-Geometrie“

Seitenriss)		tatsächlich nur noch obigen drei Schritte durchzuführen

Konkrete Gegenüberstellung von Lösungsmöglichkeiten in GAM, CAD-3D und CABRI 3D
Bei GAM und CAD-3D gibt es nicht die Möglichkeit Punkte oder Geraden darzustellen, dafür wurden diese Programme auch nicht entwickelt. Um solche Aufgaben mit Geraden und Punkten hier durchführen zu können, muss auf Kanten von Quadern oder Ecken von Körpern oder ebenen Figuren ausgewichen werden.

Lösung in GAM:
Abstand einer Geraden/Strecke vom Eckpunkt eines Quadrates

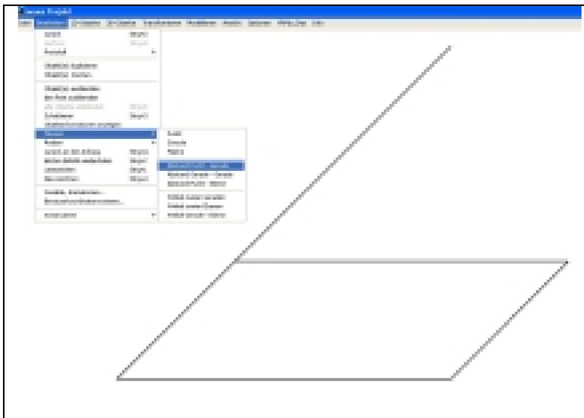
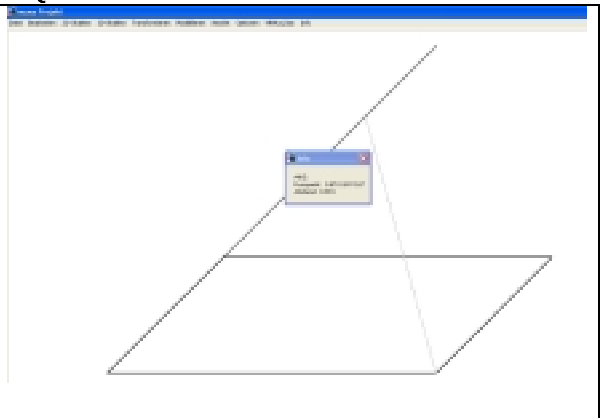
	

Abb. 03 / GAM: Menüpunkt BEARBEITEN / MESSEN bietet eine reiche Auswahl an Messmöglichkeiten	Abb. 04 / GAM: Anklicken des Punktes und der Ge-raden, dann wird das Berechnungsergebnis angezeigt und die kürzeste Abstandsstrecke eingeblendet

Lösung in CAD-3D:
Abstand einer Quaderkante vom Eckpunkt eines Würfels

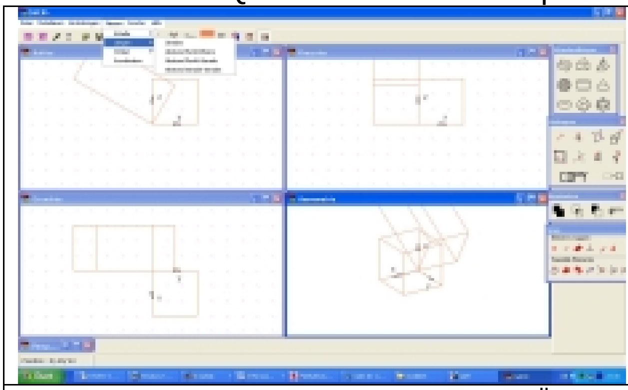
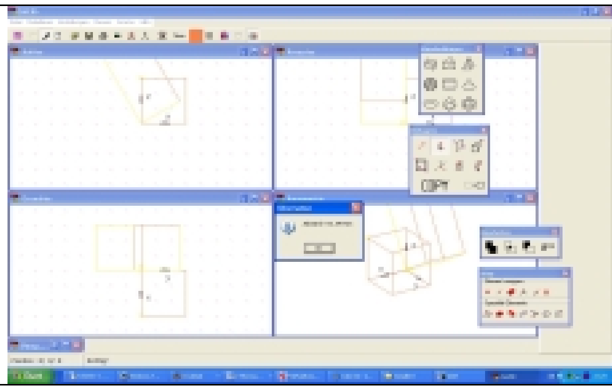
	

Abb. 05 / CAD-3D: Menüpunkt MESSEN / LÄNGEN bietet eine reiche Auswahl an Messmöglichkeiten	Abb. 06 / CAD-3D: Aktivierung des SNAP-Modus, Anklicken des Punktes und der Geraden, dann wird das Berechnungsergebnis angezeigt.

…und in CABRI 3D: Der Konstruktionsablauf kann genau dem der traditionellen händischen Zeichenmethode folgen, mit dem Unterschied, dass alle Konstruktionen anschaulich im Zentralriss dargestellt sind und keinen Umweg über irgendwelche Hauptgeraden/Spuren etc folgen müssen.

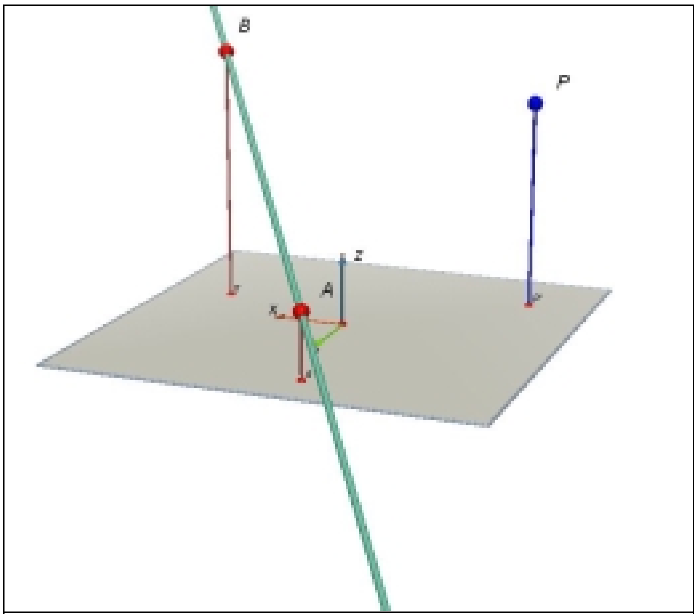


Abb. 07 / CABRI 3D: Eine Gerade und ein Punkt werden zur besseren Orientierung mit der xy-Ebene durch z-Parallele in Bezug gebracht. Selbstverständlich ist diese Angabe dynamisch veränderbar, genau so wie man es von den ebenen dynamischen Programmen her gewohnt ist!

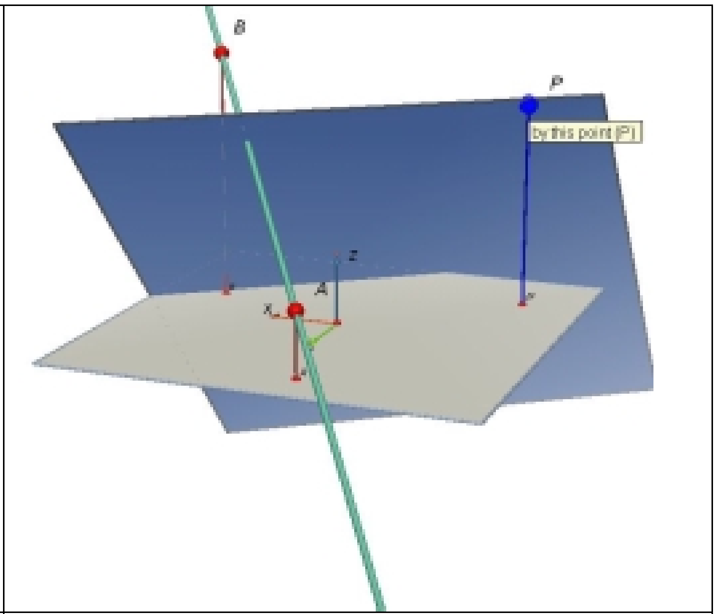


Abb. 08 / CABRI 3D: Unter „perpendicular" … findet man „normale Geraden und Ebenen". An der deutschen Übersetzung wird zurzeit gearbeitet … →Normalebene auf die Gerade durch den Punkt

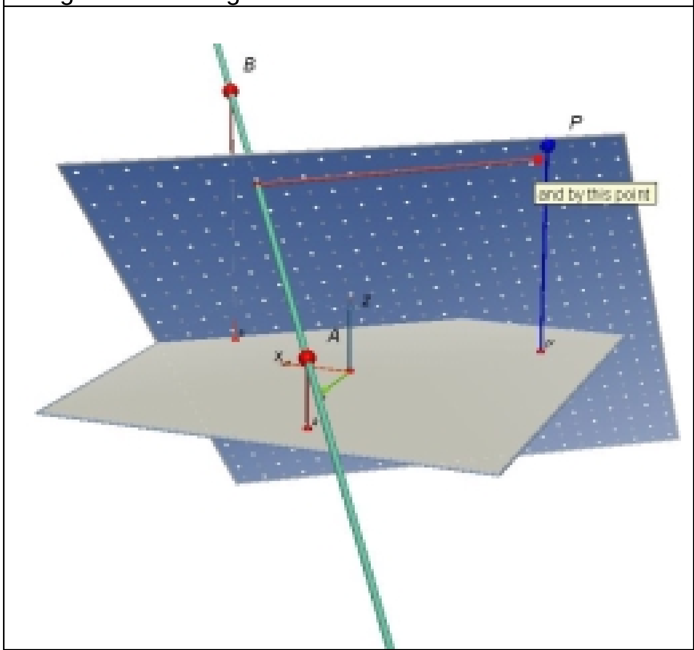


Abb. 09 / CABRI 3D: Dann wird die Ebene mit der Geraden geschnitten („Intersection Point(s)") und der Schnittpunkt mit dem Angabepunkt P verbunden

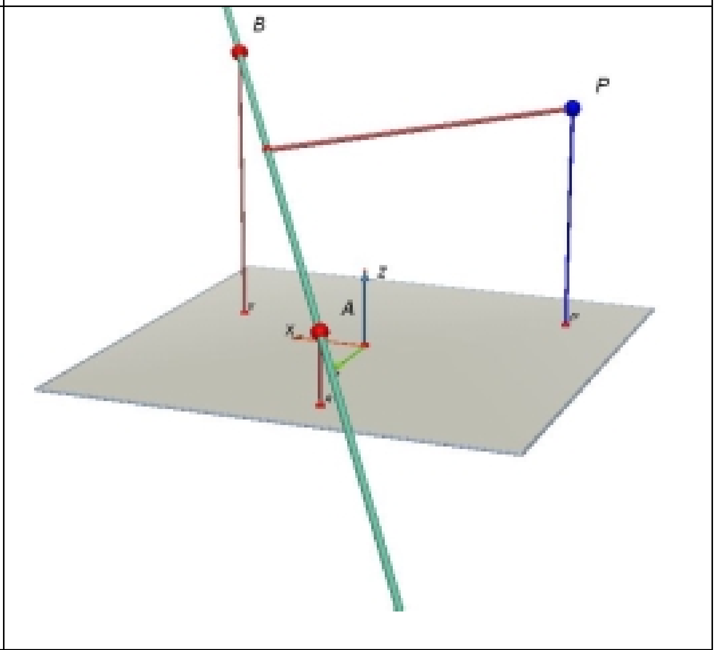


Abb. 10 / CABRI 3D: Nach Ausblenden („hidden") der Normalebene hat man den Blick auf das Wesentliche frei!

Motivationsschub für typenbildende und allgemeinbildende Fragestellungen

a) Das Nachdenken bei abstrakten Konstruktionen ist noch immer gefragt!

Aufgaben wie der kürzeste Abstand zweier Geraden, Treffgerade, Neigungswinkel, Winkel zwischen Ebenen, Reflexionen an Ebenen, Gelenkwerke (wackelig, kippend, ..) oder die Lösung manch klassischen Problems aus der „DG-Schulgeometrie" [Stachel 1982] wie die bekannten Aufgaben „Flugzeugfahrwerk einfahren", „Tor oder kein Tor" … können nun - nicht mehr nur „durch ihn, den Computer" oder durch „das Programm" – sondern durchaus durch Umsetzung eines selbst erarbeiteten realen Konstruktionsplanes ermittelt bzw. gelöst werden. Nun ist nicht mehr nur eine Zahl das einzige Ergebnis ganz ohne Raumdenken, sozusagen ganz ohne jede Anstrengung. Die Gedankengänge und das Übungsfeld für wichtige analytische Denkvorgänge, für das Zerlegen von Abläufen in Einzelschritte, die

einfach weggefallen schienen, bleiben im Unterricht erhalten. Der in den Siebzigerjahren im DG-Unterricht der Schule (AHS) bestehende „Kern“, nämlich das Konstruieren von „idealen“ Objekten im Raum in zugeordneten Normalrissen, sozusagen der mathematisch-analytische Ansatz, muss nun nicht mit einem Male ganz weg brechen – wie es die letzten Jahre den Anschein hatte. Dies allerdings mit dem Unterschied zu jetzt, dass Konstruktionen nicht mehr fast ausschließlich im Grund- und Aufrissverfahren durchgeführt sondern – so wie bei den vielfach inzwischen verwendeten Freihandskizzen auch – in Parallelriss. Dadurch wird das Raumvorstellungsvermögen ja weit stärker gefördert, als wenn nur „unanschaulich“ und für so manchem Schüler / manche Schülerin auswendig eintrainiert im Grund- und Aufriss liniiert wird.
Der neue Ansatz – verstärktes Skizzieren und Konstruieren im Parallelriss – wird durch eine dynamische 3D-Geometriesoftware voll und ganz unterstützt. Konkret sieht man schon nach den ersten Konstruktionen mit CABRI 3D den unschätzbaren Vorteil des „exakten dynamischen Raumkonstruierens“ gegenüber der Papier-Bleistift-Skizze, nämlich den der jederzeitigen Möglichkeit, das Objekt, die entwickelten Konstruktionen aus den verschiedensten Blickrichtungen ansehen und Angabeelemente beliebig verändern zu können ohne die Konstruktionen anschließend neu ausführen zu müssen. Und dies, obwohl bei CABRI 3D derzeit noch wichtige Elemente einer dynamischen Geometriesoftware fehlen, wie sie inzwischen bei der ebenen dynamischen Geometrie seit Jahren zum Standard zählen wie die Möglichkeiten Makros zu speichern oder Ortslinien zu zeichnen.

b) Wichtig vor allem für die AHS: **Die allgemeinbildenden Aspekte hervorkehren**
Gehören die theoretischen Aufgaben Gemeinlot – Treffgerade – Winkel zweier Ebenen – das Konstruieren „theoretischer Idealkörper“ (Oktaeder, Pyramide, Würfel, …), die Reflexion von Strahlen an Ebenen tatsächlich zur Allgemeinbildung oder eher zum typenbildenden Charakter im Realgymnasium?
Soll ein Maturant / eine Maturantin wissen, wie man den Abstand zweier windschiefer Geraden konstruiert oder wie man Geraden an Ebenen oder gar Kugelflächen reflektieren lassen kann?
Oder sollte man besser fragen: Gehört es zu Allgemeinbildung, Vorgänge in seiner Umgebung erklären und verstehen zu können, etwa zu wissen …

- …dass zwei sich kreuzende Freilandstromleitungen einen gewissen Mindestabstand haben müssen, (→ Baustein 02),
- … dass dies auch bei zwei Flugrouten der Fall sein muss und wie man den Abstand zweier solchen Flugrouten, die zwei Flugzeuge durch ihre Kondensstreifen quasi in den blauen Himmel zeichnen, ermitteln kann,
- … dass bei einer windschiefen Dachfläche der Abstand zweier Nachbarsparren nicht so einfach angegeben werden kann, weil er in jeder Höhe unterschiedlich ist,
- dass es bei vielen Supermarktkassen Sicherungssysteme gibt, die auf Reflexion und Spiegelung beruhen (→ Baustein 04),,
- … worauf die Reflexion an Verkehrsspiegeln beruht (→ Baustein 05),
- … was die Würfelecken an Donaubrücken bedeuten und dass dasselbe Prinzip auch bei jedem Fahrradreflektor gleich funktioniert (→ Baustein 03),
- …dass man bei allen Objekten, die am Radarschirm - aus welchen Gründen immer – unsichtbar bleiben sollen, rechte Winkel vermeiden soll,
- …wie man unregelmäßige von regelmäßigen Körpern unterscheiden und nachweisen kann und dass es nur fünf solche Körper geben kann (→ Baustein 06),
- …dass man in der Biologie und Chemie ganz natürlich solche Gedankengänge zur Allgemeinbildung zählt, in DG aber „nur“ zum typenbildenden Fachwissen.

Beispiele aus dem Themenkreis „Abstandaufgaben“

[Baustein 02] „Kürzester Abstand windschiefer Geraden“, „Gemeinnormale“

	
Abb. 11: Sich kreuzende Stromleitungen sind zwar selten, in der Praxis aber unvermeidbar. Ein gewisser Mindestabstand ist Pflicht laut ÖVE-Vorschrift für den Leitungsbau („L 11“) und je nach Spannung unterschiedlich.	Abb. 12: „Windschiefes Dach“ (HP-Flächenstück, fotografiert in Kipfenberg an der Altmühl / D): Benachbarte Sparren sind zueinander windschief, ebenso wie die beiden Ortgänge. Die Dachlatten sind alle verschieden lang
	
Abb. 13: Windschiefe Flugbahnen – durch Kondens-streifen in den Himmel gezeichnet. Haben Sie sich noch nie gefragt, wieweit diese beiden Flugbahnen nun tatsächlich voneinander entfernt sind?	Abb. 14: Der räumliche Abstand der Flugbahnen hat nur mittelbar etwas mit der tatsächlichen Distanz der beiden Flugzeuge zu tun. Die Flugzeit könnte in einem „Weg-Zeit-Diagramm“ eingetragen werden, welches hier allerdings vierdimensional ist.

Ergänzung zu den Bemerkungen bei Abbildung 14:
Bei der Konstruktion kürzester Entfernungen bewegter Objekte in einer Ebene ist im Raum-Zeit-Diagramm bekanntlich das Problem der kürzesten horizontalen Entfernung zweier windschiefer Geraden (der „Weltlinien“) zu lösen [Wunderlich 1980].

Bei der praktischen Durchführung mit einem 3D-dynamischen Programm fallen die Schritte des Analysierens einer Aufgabe und das Zergliedern in Teilaufgaben nicht weg. Didaktisch wichtig erscheint, dass diese Vorarbeiten unmittelbar bei der Konstruktion verifiziert werden können. Der Lernende erhält sofort eine Rückmeldung, ob seine Gedankengänge betreffend Konstruktionsablauf richtig sind.

[Baustein 02] Gemeinnormale als Lösung des Abstandsproblems

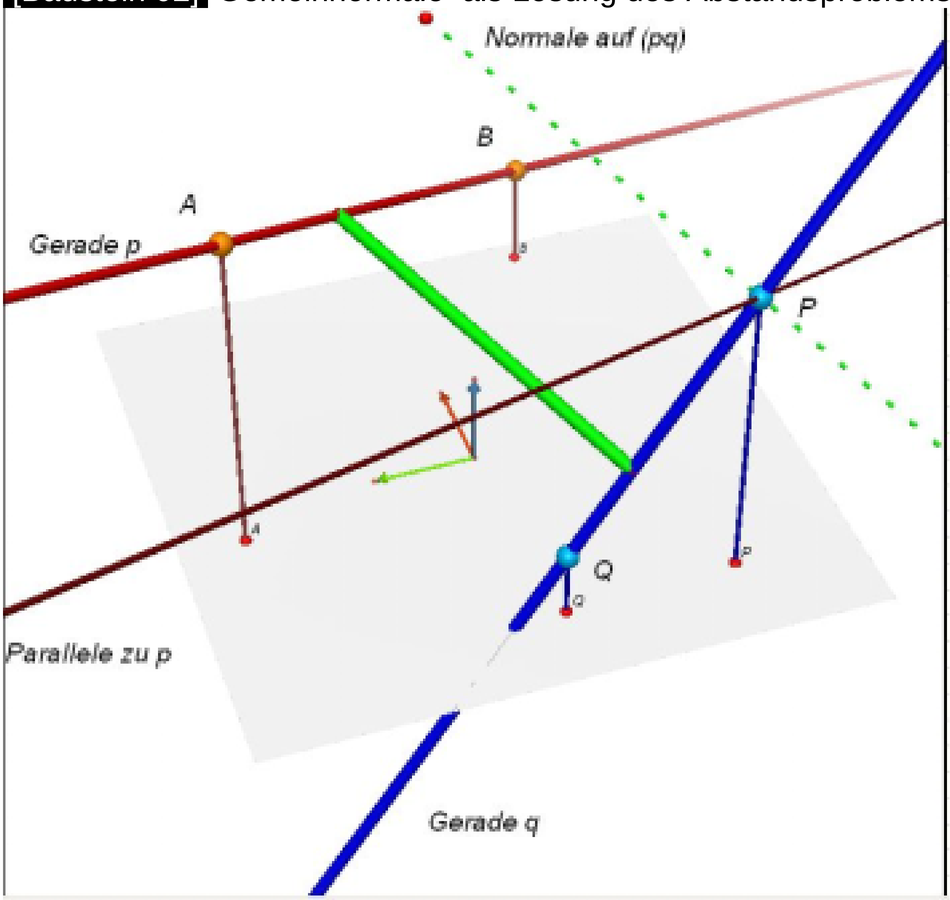


Abb. 15: Der kürzeste Abstand „Gemeinnormalenstrecke“ (früher „Gemeinlot“) zweier windschiefer Geraden kann unter Außerachtlassung diverser Seitenrisse oder der verschiedensten Konstruktionsprinzipien ermittelt werden. Schlicht und einfach durch sukzessive Lösung der Teilaufgaben, in die die Aufgabe zuvor etwa in einem Lehrer-Schüler-Gespräch zerlegt wurde:

1. Festlegen der gemeinsamen Normalenrichtung (= Normale auf die Ebene von q und der Parallelen zu p).
2. In der Ebene - bestimmt durch die gemeinsame Normalenrichtung (punktiert eingetragen) und die Gerade q (blau) - muss die Gemeinnormalenstrecke liegen.
3. Der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geraden p ist schließlich der eine Endpunkt der kürzesten Verbindungsstrecke. Die Lage der Strecke wird durch einfaches Parallelzeichnen zur unter Punkt 1 ermittelten gemeinsamen Normalenrichtung festgelegt.

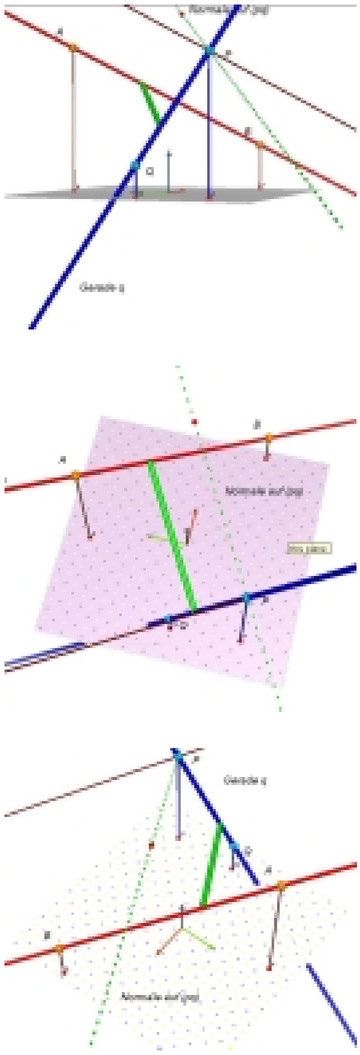


Abb. 16a-c: Gedrückte rechte Maustaste verändert - auch mitten in Konstruktions- oder Zeichenvorgängen – die Ansicht: So kann jederzeit Klarheit über die Raumlage erhalten werden.

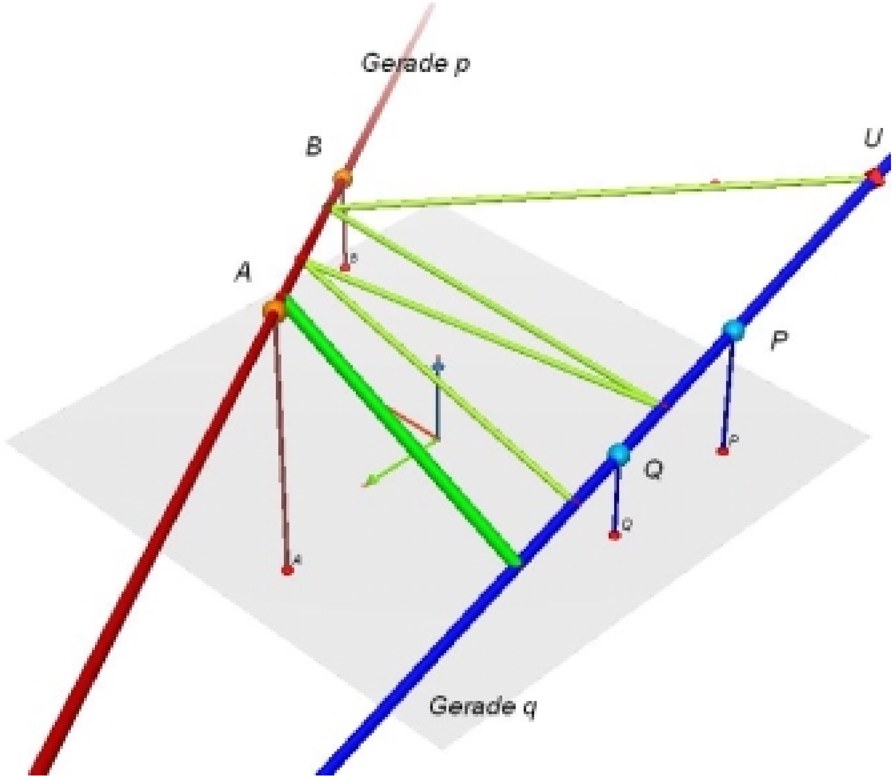


Abb. 17: Kein Problem für eine dynamische 3D-Geometrie stellt die Visualisierung einer iterativen Lösung dar, die – etwa in fächerübergreifender Vorgangsweise – gemeinsam mit den Fächern Mathematik und/oder Informatik behandelt und konkret durchgeführt werden könnte. Von einem beliebigem Raumpunkt U aus (hier in der Abbildung bereits auf der Geraden q liegend angenommen) wird eine Normale auf eine der beiden Geraden (hier die rote Gerade p) konstruiert. Aus deren Auftreffpunkt auf p legt man die Normale auf q, von diesem Punkt wieder auf p und so fort. Man erhält Verbindungsstrecken, deren Längen eine monoton fallende Folge bilden, deren Grenzwert die kürzeste Entfernung - eben die Länge der Gemeinnormalenstrecke – ist. Durch die Variation der Angabeelemente und die stetige Veränderbarkeit der Ansicht können auch nicht so begabte SchülerInnen wertvolle Einsichten gewinnen.

Dasselbe Verfahren kann im Prinzip zur graphischen Lösung von Gleichungssystemen verwendet werden, deren rechnerisches Äquivalent bekanntlich eine der mathematischen Grundlagen der Computertomographie darstellt und von Josef RADON (1887 – 1956, Wien) bereits 1917 theoretisch entwickelt worden ist [Hejtmanek 1980].

Beispiele aus dem Themenkreis „Reflexion“

A) [Baustein 03] Reflexion an einer Würfelecke

Die Behandlung von Reflexionsaufgaben stellt durchaus eine Möglichkeit dar, das erworbene geometrische Wissen anzuwenden [Müller 1989]. Nun ist es im Vergleich zu früher um ein Vielfaches einfacher, diese relativ aufwändige Konstruktion der Reflexion eines Strahles an einer Würfelecke im Unterricht tatsächlich durchzuführen. Durch Einsatz der dynamischen 3D-Software ist es nun möglich, tatsächlich die Lage des einfallenden Strahls zu verändern und praktisch festzustellen, dass der ausfallende Strahl parallel zum einfallenden zu sein scheint. Die offensichtliche Beweisbedürftigkeit dieser Feststellung stellt eine Bereicherung für den Unterricht dar.

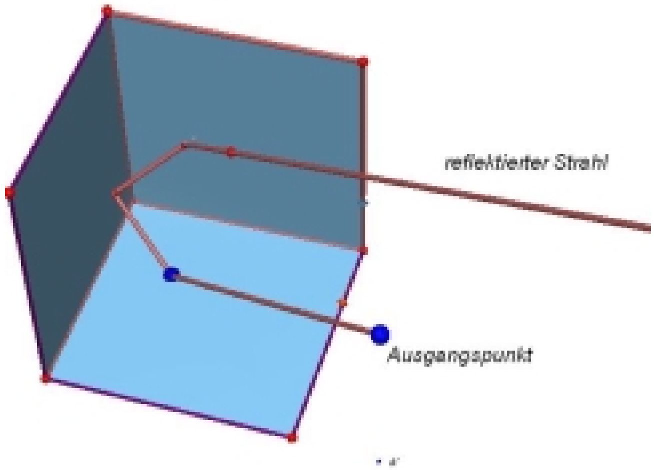


Abb. 18: Die dynamische Zeichnung gestattet es, den Ausgangspunkt zu variieren. Man erkennt trotz der perspektiven Darstellung, dass der reflektierte Strahl stets zum Ausgangsstrahl parallel zu sein scheint. Diese von den Lernenden selbst erkennbare Tatsache fordert einen nachfolgenden Beweis gleichsam heraus.

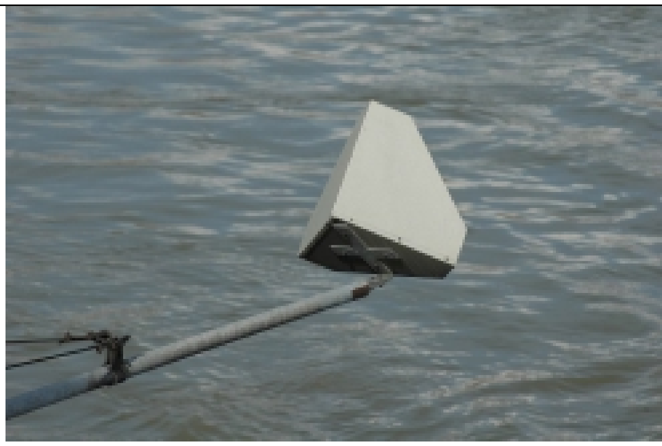


Abb. 20: „Reale“ Würfelecken (Kantenlänge rund 75 cm) dienen als Radarreflektoren zur Warnung vor Hindernissen, etwa Brückenpfeilern.

Abb. 21: „Ohne doppelten Boden“, ohne komplizierte Elektronik, einfach drei Blechplatten. Dasselbe Prinzip wird bei Fahrradreflektoren – allerdings nicht in Blech sondern in Kunststoff - angewendet.

Abb. 19: Würfelecken sind an langen Radarauslegern abgebracht und leiten die Schiffe auf der Schifffahrtsrinne unter Brücken durch, hier unter der Donaubrücke Krems-Stein in NÖ (im Hintergrund die historische Altstadt von Krems-Stein).

Abb. 22: Das Schiff kann auch bei schlechter Sicht den Weg zwischen den Brückenpfeilern finden Die Würfelecke sorgt dank Parallelreflexion, dass die vom Schiff ausgesandten Radarstrahlen nach der Reflexion stets wieder am Radarsschirm des Schiffes empfangen werden können

B) [Baustein 04] Reflexion bei einer Supermarktkasse

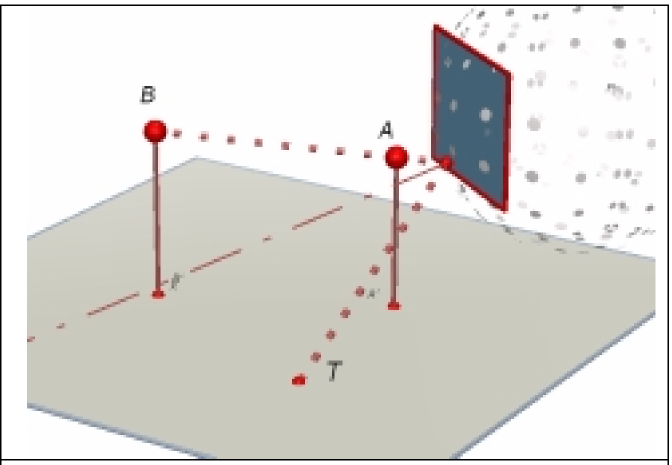
Spiegelsysteme an Supermarktkassen als Diebstahlsicherungen oder in Museen oder bei Erlebnisausstellungen zur Sichtbarmachung von sonst den Besuchern verborgener Abläufe bieten ein reiches Übungsfeld für weitere konkrete Konstruktionen und Behandlung der

Reflexionsgesetze, die mit einer dynamischen 3D-Software bequem durchgeführt werden können.

	
Abb. 23: Spiegelsystem beim Kassierplatz eines Supermarktes, um den Inhalt eines Einkaufswagens einsehen zu können.	Abb. 24: So sieht man nach Reflexion an zwei ebenen Spiegeln vom Kassierplatz aus in einen Einkaufswagen.

C) [Baustein 05] Reflexion an einem Verkehrsspiegel

Durch die Krümmung der Verkehrsspiegel konnten derartige Konstruktionen bisher im praktischen Unterricht nicht durchgeführt werden. Nähert man die Reflexionsfläche durch eine Kugeloberfläche an, so kann man nach der realen Situation - wenn schon nicht exakt, so doch andeutungsweise – konstruieren!

	
Abb. 25: Die Sonnenstrahlen werden an der Verkehrsspiegeloberfläche reflektiert und im Schattenbereich der Straße sichtbar. Die reflektierte Spiegelfäche auf der Straße entspricht in keiner Weise der erwarteten „einfach“ berandeten Figur. Eine Kugelfläche stellt natürlich nur eine grobe und sehr vereinfachende Annäherung an die tatsächliche Spiegelfläche dar.	Abb. 26: Die Reflexion eines Strahles an einer Kugeloberfläche stellt eine Möglichkeit dar, das geometrische Raumdenken zu festigen und Konstruktionsabläufe vor einem „mehr realen“ Hintergrund ablaufen zu lassen. Die die Spiegeloberfläche repräsentierende Kugel wird (rechts oben) schwach angedeutet. Die Reflexion erfolgt an der Kugeloberfläche, durch Variation der Punkte A und B kann die Lage des einfallenden Strahles beliebig verändert werden

Beispiele aus dem Themenbereich „Regelmäßige Körper“ **[Baustein 05]**

Exemplarisch sollen Möglichkeiten bei der Behandlung regelmäßiger Körper aufgezeigt werden, die eine dynamische 3D-Software bieten kann. Die regelmäßigen Körper stehen im Programm CABRI 3D als Grundelemente zur Verfügung, leider fehlen (noch?) die Boole'schen Operationen in der Form, wie man sie von den didaktisch ausgerichteten 3D-CAD-Programmen gewohnt ist. Zurzeit lassen sich zwar Durchdringungen visuell dynamisch durchführen – allerdings ohne die Möglichkeit die Differenzmenge auch tatsächlich sichtbar zu machen und als neues Objekt zu speichern!

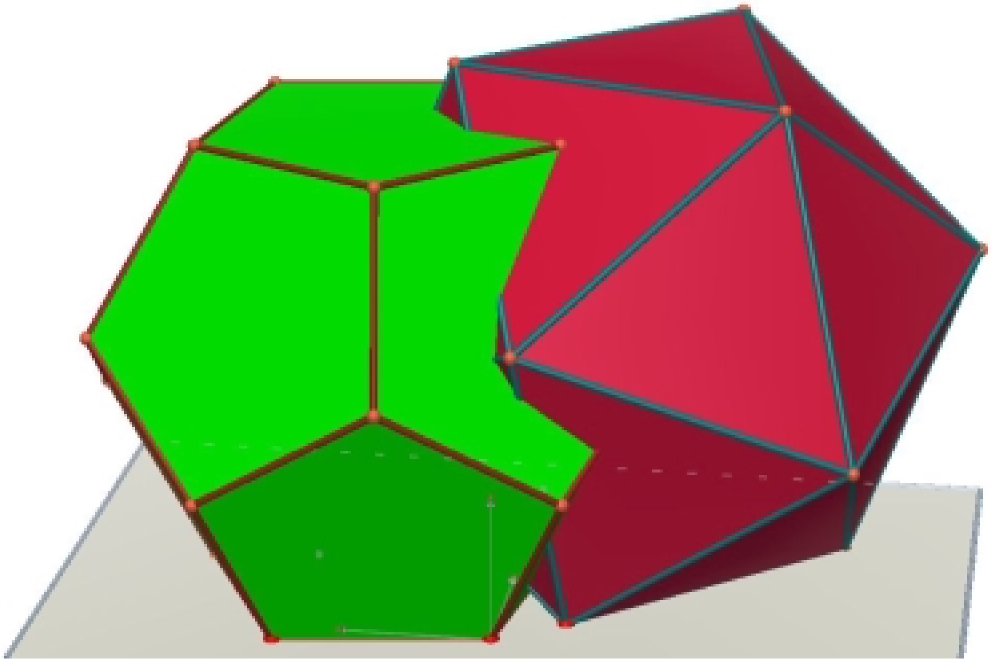
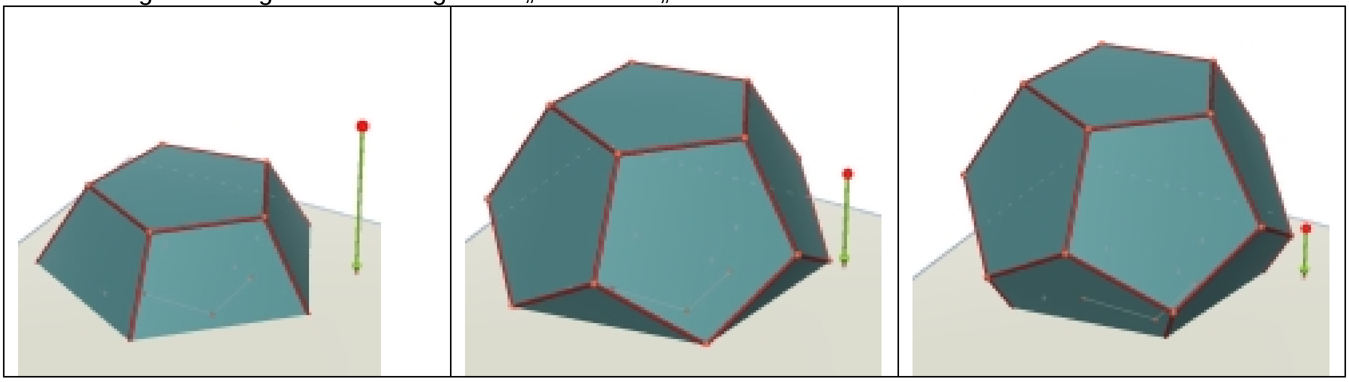


Abb. 27: Beispiel für eine Durchdringung von regelmäßigem Ikosaeder mit einem regelmäßigen Pentagon-dodekaeder. Selbstverständlich sind beide Körper dynamisch bezüglich Größe und Lage variierbar.

Abb. 28a-c: Das „Herauswachsen“ eines Körpers aus einer Ebene baut als einfache Übungsaufgabe wiederum auf die dynamische Veränderungsmöglichkeit auf. Der rote Punkt rechts vom Körper hat die Funktion eines Schiebereglers. Die grüne Strecke gibt die „Tiefe“ des „versunkenen“ Teils an.



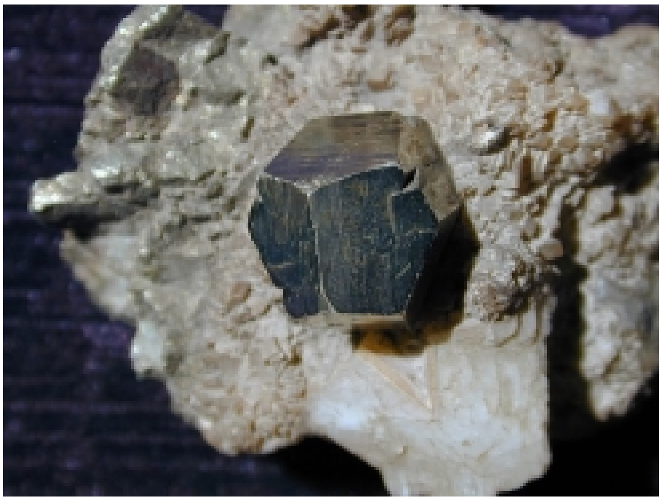
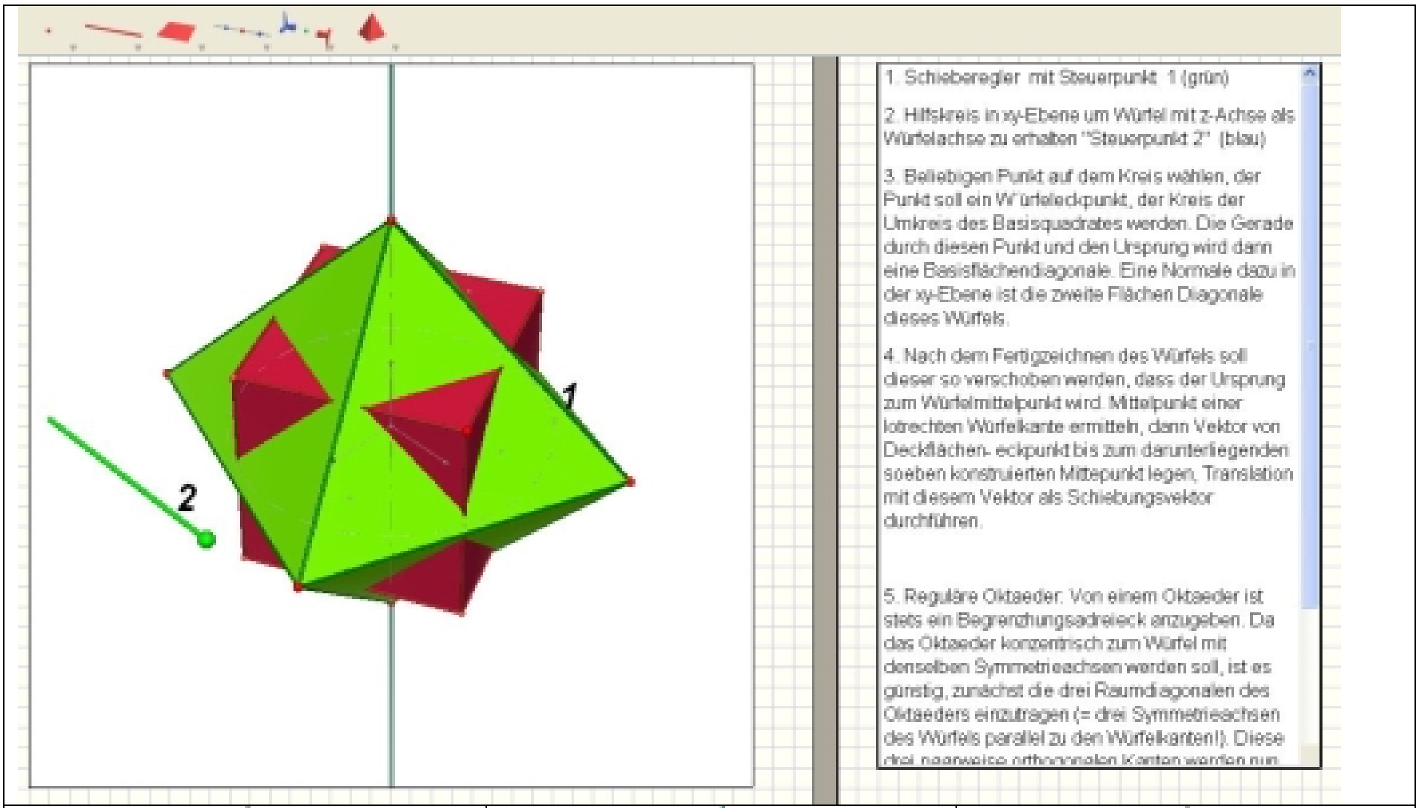


Abb. 29: Fast wie ein „Herauswachsen“ sieht es in der Natur aus: Pyrit kristalliert als Pentagondodekaeder.

Interessante methodische Ansatzpunkte ergeben sich durch den Einsatz von Schiebereglern, in der abgebildeten Durchdringung wird damit die Diagonalenlänge des Oktaeders kontinuierlich verändert. SchülerInnen können trotz Vorliegen einer fertigen Konstruktion Erkenntnis über mögliche „Durchschnittskörper“ gewinnen.

Abb. 30: Der Schieberegler wird einfach durch eine Strecke samt darauf liegenden Punkt materialisiert. Programmtechnisch sei zusätzlich angemerkt, dass in einem eigenen Textfenster Notizen gespeichert und eingeblendet werden können.



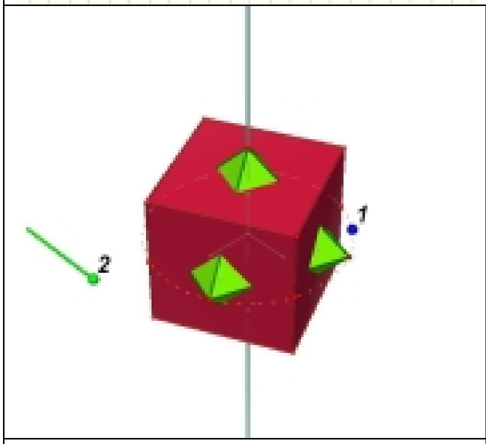
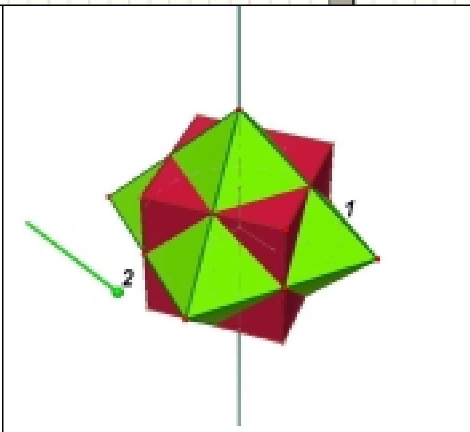
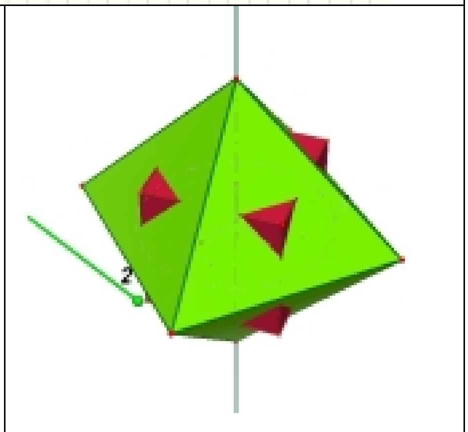
		

Abb. 31a: Oktaederstumpf als Durchschnittskörper.	Abb. 31b: Ein Kubooktaeder als Durchschnittskörper.	Abb. 31c: Ein Würfelstumpf als Durchschnittskörper.

Beispiele aus dem Themenkreis „Traditionelle Körperkonstruktionen“

[Baustein 07]

Ob nun diverse Körperkonstruktionen als Denkübungen weiterhin ausgeführt werden sollen, muss jeder Lehrende selbst entscheiden. Die Qualität der Durchführung und die Bildungsziele sind nun andere als früher. Ging es früher um das Eintrainieren der Lagen- und Maßaufgaben, so liegt nun der Schwerpunkt in der Zerlegung einer komplexen Aufgabe in Teilprobleme bis herunter zu den vom jeweiligen Programm angebotenen Basiskonstruktionen wie etwa das Errichten einer Normalebene, eines Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene etc. Auch das soll an einem Beispiel exemplarisch demonstriert werden.

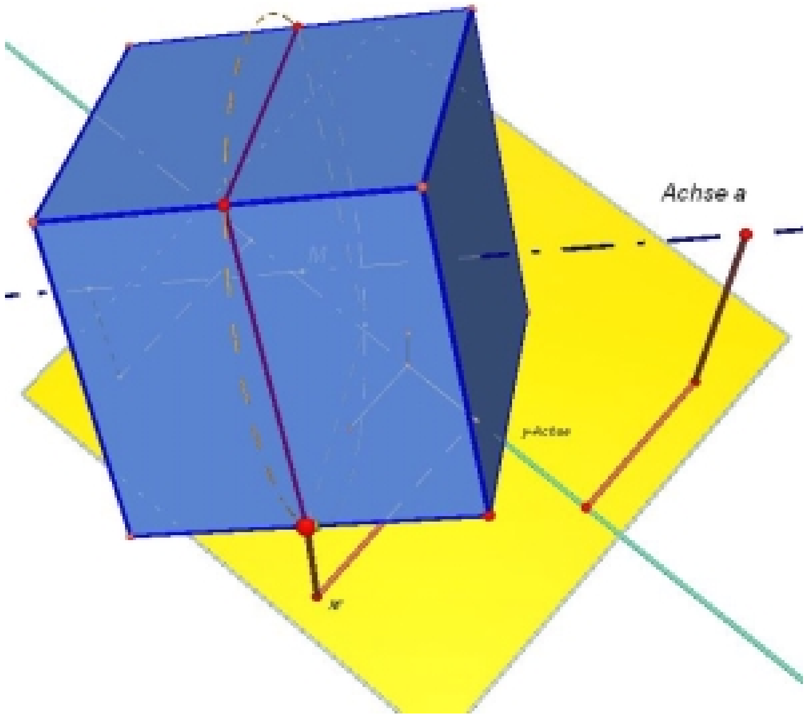


Abb. 32: Ein Würfel ist zu konstruieren, von dem man den Mittelpunkt einer Würfelseitenkante und die dazu parallele Symmetrieachse kennt.
Mit CABRI 3D zerteilt man die Aufgabe (ähnlich wie bei der händischen Konstruktion) in Teilaufgaben, die hier in CABRI 3D tatsächlich nur aus der Ausführung der in Klammer geschriebenen Mausklicks bestehen:

1. Normalebene auf die Symmetrieachse durch den Halbierungspunkt (perpendicular)
2. Schnitt dieser Ebene mit der Achse liefert den Mittelpunkt des Würfels → M (intersection point).
3. Kreis in dieser Normalebene mit Mitte M durch den gegebenen Halbierungspunkt H (circle)
4. Das Quadrat mit diesem Kreis als Umkreis zeichnen (perpendicular/segment)
5. Würfel über diesem Quadrat errichten (cube)
6. Würfel um eine halbe Würfelkantenlänge entlang der Symmetrieachse verschieben (vector/translation)

Technische Schlussbemerkungen

Die derzeitige Version von CABRI 3D (April 2004, Version 1.03) ist im praktischen Unterricht sicherlich gut einsetzbar, obwohl noch das eine ohne andere Feature, das man von ebener dynamischer Geometriesoftware inzwischen gewöhnt ist, implementiert werden sollte.

Kritikpunkte: Keine Koordinateneingabe, keine Maßergebnisse, keine Makros, keine Ortslinien, keine „echten“ auswertbaren Boole’schen Operationen

Vorteil: Sehr kurze Einarbeitungszeit, ansprechendes Design, windowskonforme Änderung der Eigenschaften von Objekten (Rechte Maustaste), im Unterricht verwendbar, ein Anfang ist gemacht, im Internet lesbar: XML, Plugin für Browser downloadbar.

Informationen über Kosten und Bezugsmöglichkeit unter www.cabri.com

Literatur:

[AKMNO 2004] A. Asperl, M. Kraker, G. Maresch, W. Nowak, O. Röschl. Beispiele für Jahresplanungen. IBDG 23(2): 8 – 14, 2004.

[Hejtmanek 1980] Hejtmanek. Numerische Auflösung von linearen Gleichungssystemen in der Computertomographie. ÖMG-Heft 5, 1980.

[Müller 1989] T. Müller. Geometrie auf der Donau ... IBDG 8(1): 49 - 53, 1989.

[Müller 2003] T. Müller. Die Geometrie auf ihrem Weg zur Dynametrie. IBDG 22(2): 6 – 11, 2003.

[Stachel 1982] H. Stachel unter Mitarbeit von W. Fuhs und W. Jank. Anwendungsorientierte Maßaufgaben zur Schulung der Raumanschauung. Heft 125 der Skripten zur Lehrerfortbildung Allgemeinbildende Höhere Schule. Lehrerfortbildung des Bundesministeriums für Unterricht und Kunst, 1982.

[Wunderlich 1980] W. Wunderlich. Dreidimensionale graphische Fahrpläne. MU 4/80: 40 – 57, 1980.