Schulmathematik
Elementare und konstruktive Geometrie

Arbeitsskriptum zur Lehrveranstaltung, v1.6

Modul UF MA 03 Geometrie: VO 2 ECTS, 2 SSt | UE 2 ECTS, 1 SSt

Universität Wien, Wintersemester 2017/18

Thomas Müller
Cluster Nordost (KPH Wien/Krems)
thomas.mueller@kphvie.ac.at

Es geht um den Unterricht von elementarer und konstruktiver Geometrie in der Ebene und im dreidimensionalen Anschauungsraum in der Sekundarstufe.

Neben schulmathematischen Betrachtungsweisen der Elementargeometrie soll diese Lehrveranstaltung (LV) gleichzeitig eine Einführung in die Geometrie der Darstellung von räumlichen Objekten und das Operieren damit geben, um auch die Lehrplanforderungen im Fachbereich *Geometrisches Zeichnen* (RG, NMS) umsetzen zu können.

Dieses Arbeitsskriptum verweist auf die fachmathematische LV *„Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt“* und bezieht sich in Verweisen auf das Skriptum von Markus FULMEK (2016) sowie die gleichnamige LV von Bernhard LAMEL (2017) (meist zitiert als *„Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p page“*).

In der begleitenden Moodle-Lernplattform befinden sich neben Ergänzungen zur LV und den Übungsbeispielen auch Hinweise zur meist verwendeten Software: GAM, Geogebra, Sketchup Make, …

Vorausgesetzt werden die Kenntnisse der Einführungslehrveranstaltung nach SCHICHL, H.; STEINBAUER R.: Einführung in das mathematische Arbeiten. Berlin Heidelberg: Springer, 2009 [v.a. der Abschnitt 7 „Analytische Geometrie“, p 355 – 445]

Folgende Literatur sei begleitend und ergänzend empfohlen:

- FRANKE, M.: Didaktik der Geometrie (in der Grundschule). 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum, 2009
- KADUNZ, G.; STRÄSSER, R.: Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I. Hildesheim: Franzbecker, 2007
- KRAUTER, S.: Erlebnis Elementargeometrie. München: Spektrum, 2005
- LUDWIG, M.; FILLER, A.; LAMBERT, A. (Hrsg.): Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Wiesbaden: Springer-Spektrum, 2015
- SCHUPP, H.: Elementargeometrie. Paderborn: UTB Schöningh, 1977
- WEIGAND, H.-G. et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Springer/ Spektrum, 2009

Hinweise auf weitere Literaturquellen zu bestimmten Themen erfolgen in der LV bzw. bei einzelnen Abschnitten dieses Arbeitsskriptums.

Ziele unterschiedlicher Stufen mathematischer Ausbildung:

Fachmathematik: Die Studierenden entwickeln ein Grundverständnis der wichtigsten Konzepte und Methoden der Geometrie.

Schulmathematik: Die Studierenden erkennen die Relevanz der fachmathematischen Konzepte für den Schulunterricht und können diese dort angemessen verwenden. Sie kennen verschiedene Möglichkeiten für Zugänge zu grundlegenden Themen des Geometrie-Schulunterrichts und der Vektorrechnung im Unterricht und können diese bewerten. Die Studierenden können in diesem Gebiet *fachdidaktische Konzepte anwenden* und den Computer in angemessener Weise einsetzen, sie kennen typische Fehlvorstellungen und passende Interventionsmöglichkeiten.

In diesem Rahmen werden zwei inhaltliche Schwerpunkte alternativ angeboten:

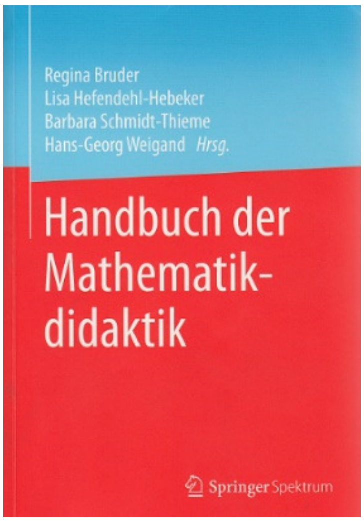
Schwerpunkt A: Elementargeometrie und Vektorrechnung

Schwerpunkt B: Konstruktiv-darstellende Verfahren mit Bezug auf den Unterrichtsgegenstand Geometrisches Zeichnen

Schulunterricht: Dieser erfolgt gemäß Lehrplan unter Beachtung der Kompetenzkonzepte zur Erreichung der vorgegebenen Bildungsstandards für die NMS/AHS-Unterstufe | AHS-Oberstufe | BHS

Deskriptive und relationale Geometrie

Im *Handbuch der Mathematikdidaktik* [BRUDER, HEFENDEHL-HEBEKER, Heidelberg, 2015,] werden die intuitiven Entwicklungslinien aus historischen Wurzeln der Geometrie zur Bewältigung des Alltags (Vermessung, Darstellung, Pläne, …) als ***deskriptive*** *also „beschreibende“* ***Geometrie*** bezeichnet. Die sich daraus entwickelten Lehrsätze, deren Begründung, die zur Berechnungsvereinfachung gefundenen Formeln und schließlich die systematische Darstellung in der heute meist üblichen Form (Definition, Satz, Beweis, …) wird als ***relationale Geometrie*** bezeichnet.



Geometrie: synthetisch oder/und analytisch?

Die in der Sekundarstufe I meist vorherrschende **synthetische** Herangehensweise an geometrische Eigenschaften, Konstruktionen und Begründungen wird in der Oberstufe durch das Werkzeug der **analytischen Geometrie** sinnvoll ergänzt bzw. ersetzt. Jede dieser Methoden hat ihre Stärken, die je nach Situation effektiv eingesetzt werden können. In der Sekundarstufe I kann durch schrittweises Heranführen an die **Koordinatisierung des Anschauungsraumes** eine tragfähige Basis für die späteren arithmetisch-algebraischen Überlegungen geschaffen werden.

In dieser Lehrveranstaltung kommt es zu einer Durchdringung von deskriptiver und relationaler Geometrie mit den Methoden der synthetischen und analytischen Geometrie.

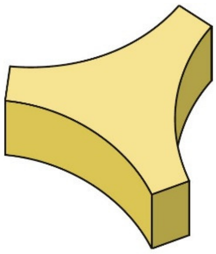
Inhaltsverzeichnis

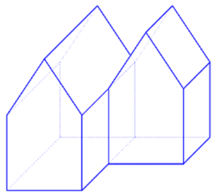
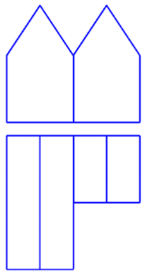
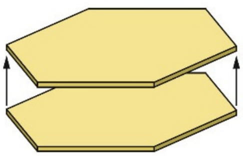
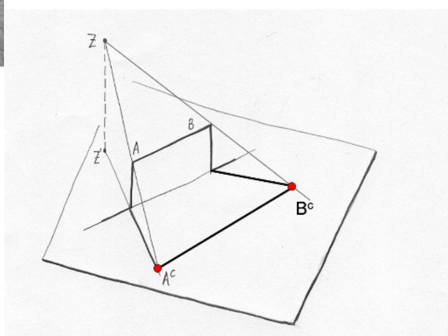
0. Von den Leitideen des Raumgeometrieunterrichts 5
1. Zeichnerische Darstellung räumlicher Objekte in einer Ebene 6
   1.1 Projektion 6
   1.2 Parallelprojektion 8
   1.3 Zentralprojektion 11
   1.4 Zur Umkehrung der Inzidenztreue 12
   1.5 Weitere Projektionen 13
   1.6 Raumkoordinatensysteme 14
   1.7 Axonometrie – Parallelprojektion mit Hilfe eines Koordinatensystems 15
   1.8 Weitere Koordinatensysteme 18
2. Schlüsselstelle: „Einsichten in die Grundlagen“ 20
   2.1 Punkte, Geraden, Strecken 22
   2.2 Konstruktiv-Zeichentechnisches 26
3. Schlüsselstelle „Messen“ (Länge, Winkel, Fläche, Volumen) 27
   3.1 Längenmessung 27
   3.2 Winkelbegriff 29
   3.3 Winkelmessung 30
   3.4 Parallelität 32
   3.5 Strecken: kurz oder gerade? 34
   3.6 Flächenmessung 35
   3.7 Volumsmessung 39
4. Anfänge des Skizzierens und Konstruierens im Sek-I-Unterricht 42
   4.1 Das Spiralprinzip nach BRUNER 43
   4.2 Aus der Schulpraxis 46
   4.3 Klassische konstruktiv unlösbare Probleme - Grundkonstruktionen 50
   4.4 Konstruktionen mit eingeschränktem Werkzeug 52
5. Konstruktive Raumgeometrie 53
   5.1 Die Lernumgebung „Würfel“ 54
   5.2 Lagenaufgaben (=Schnitte) 63
   5.3 Arbeiten in zugeordneten Normalrissen 66
6. Schlüsselstellen: Kongruenz und Ähnlichkeit 71
   6.1 Kongruenz und Kongruenzabbildungen 71
   6.2 Ähnlichkeitsbegriff 83

6.3 Zentrische Streckung 88
7. Ortslinien, Kegelschnitte und Spurkurven 89
7.1 Der Kreis als Ortslinie, Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel 91
7.2 Die Ellipse 93
7.3 Kegelschnitte - Übersicht 101
7.4 Die Parabel 104
7.5 Die Hyperbel 107
8. Rund um Kreis und Kugel und weitere Körper/Flächen 109
8.1 Kreisformeln 110
8.2 Kugelvolumen und Oberfläche 112
8.3 Die Erde als Kugel - konstruktiv 115
8.4 Kugelaufgaben 116
9. Regelmäßige Vielecke, reguläre und halbreguläre Körper 120
9.1 Regelmäßige Vielecke 120
9.2 Reguläre Körper 122
9.3 Halbreguläre Körper 126
9.4 Der EULERsche Polyedersatz 127
9.5 Ergänzung: „Wovon noch die Rede sein könnte?“ 128
10. Anhang 130
10.1 Aus dem Lehrplan Mathematik (AHS-Unterstufe / NMS) 130
10.2 Lehrplan Geometrisches Zeichnen 132
10.3 GZ im Mathematikunterricht? 135
10.4 Geometriebereiche im M-Lehrplan der Sek II (Gymn.) 136
10.5 Poster zu einem Faktorenmodell der Raumvorstellung 137
11. Übungen 138

0. Von den Leitideen des Raumgeometrieunterrichts

- Idee der Rekonstruktion (des Raumes aus ebenen Bildern) – das Lesen
- Idee der Projektion – das Schreiben
- Idee der Koordinatisierung/Messung – das Normieren
- Idee der Abstraktion – der geometrische Formenschatz
- Idee der Dynamik – neue Formen erzeugen



Wir verstehen unter Leitideen … Einfälle – „Ideen" eben, die im Laufe der Zeit entstanden sind, die sich als nützlich erwiesen haben und einen Erkenntnisfortschritt für den Einzelnen und für unsere Gesellschaft bewirkt haben, bewirken oder bewirken können. Jemand muss beispielsweise einmal die Idee gehabt haben, eine Skizze auf einem Blatt Papier dazu zu verwenden, um etwas Räumliches zu beschreiben. Und nun ist es selbstverständlich, dass wir über das Aussehen räumlicher Objekte mittels zweidimensionaler Aufzeichnungen kommunizieren. Nicht nur reale Raumsituationen können dargestellt sein, sondern sogar etwas, das (noch) nicht real existiert.

aus MÜLLER, T.; BLÜMEL M.; VILSECKER K.: Leitideen des Raumgeometrieunterrichtes, Informationsblätter für Darstellende Geometrie, Jahrgang 30, Heft 2/2011, Innsbruck (Seite 20 - 24)

Diese Leitideen folgen den Überlegungen von Hans Werner HEYMANN, der im Abschnitt 4 seines Buches „Allgemeinbildung und Mathematik" (2. Aufl., Weinheim u. Basel: Beltz, 2013) *zentrale Ideen der Mathematik*, die der Schulunterricht vermitteln soll, zur Diskussion stellt:

- Idee der Zahl
- Idee des Messens
- Idee des räumlichen Strukturierens
- Idee des funktionalen Zusammenhangs
- Idee des Algorithmus
- Idee des mathematischen Modellierens

Eine gute Übersicht (in der deutschsprachigen Literatur) findet sich dazu in

VON DER BANK, M.: Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In: FILLER, A., LUDWIG, M. (Hrsg.): Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des AK Geometrie in der GDM. Hildesheim: Franzbecker, 2013

Eine ausführliche Darlegung speziell für den Raumgeometrieunterricht findet sich in:

MÜLLER, T.: Leitideen des Raumgeometrieunterrichts. In: LUDWIG, M.; FILLER, A.; LAMBERT, A. (Hrsg.): Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Springer-Spektrum, Wiesbaden, 2015

1. Zeichnerische Darstellung räumlicher Objekte in einer Ebene

Deskriptive Geometrie

„Geometrie-Unterricht kann nur sinnvoll sein, wenn man die Beziehungen der Geometrie zum erlebten Raum ausnutzt.“

Hans Freudenthal (1905 – 1990)

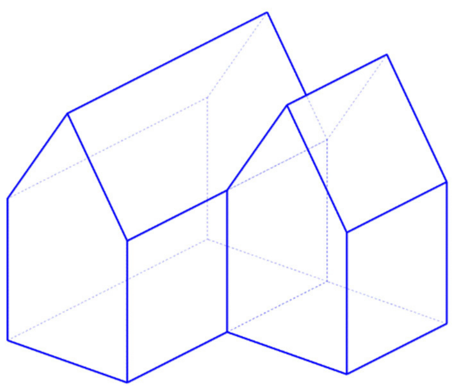
niederländischer Mathematiker und Wissenschaftsdidaktiker

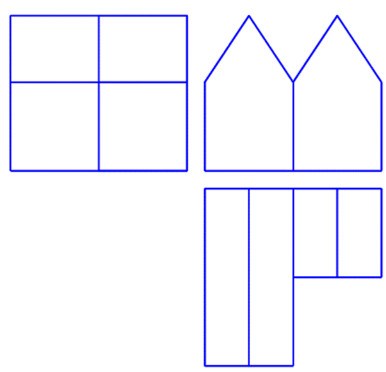
Dieser Abschnitt soll in die Themenkreise rund um die *Idee der Projektion* und um die *Idee der Rekonstruktion* Einblicke geben.
Es geht darum, den dreidimensionalen Raum (R3 oder R^3) geeignet in eine Ebene (R2 oder R^2) abzubilden. Unter R3 verstehen wir hier den uns umgebenden *Anschauungsraum*. So sollen die Erscheinungen der Welt um uns in einer besonderen Art wahrgenommen und mit Hilfe der Geometrie erschlossen werden.
Mit den Gesetzen der Abbildungen befasst sich die klassische ***Darstellende Geometrie***. Als deren Begründer gilt allgemein der Franzose **Gaspard MONGE** (1746 – 1818). Zentrale raumgeometrische und konstruktive Inhalte finden sich bereits früher, etwa beim genialen deutschen Künstler **Albrecht DÜRER** (1471 – 1528), beim römischen Architekten **Marcus VITRUV** (1. Jhdt. v. Chr.) oder beim griechischen Mathematiker **EUKLID** (um 300 v. Chr.).

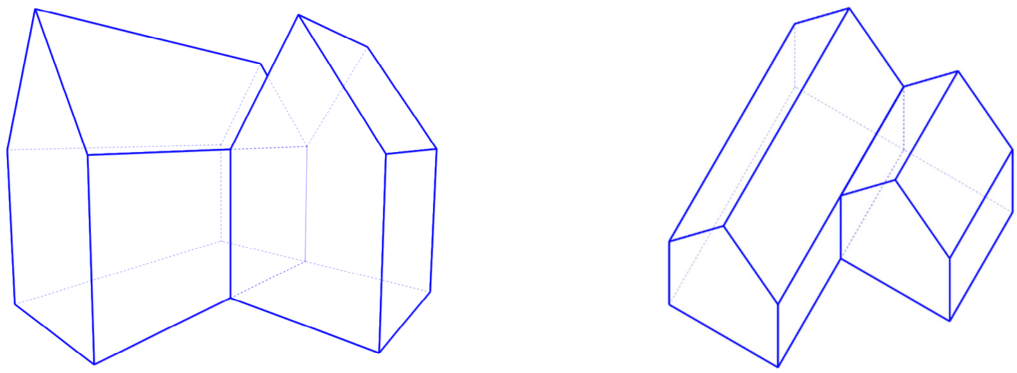
Internetsuchtipps: descriptive geometry, Axonometrie, Koordinatensystem 3d
Lehrplan 1. Klasse Sek I: Skizzen von … Quadern und ihren Netzen anfertigen können, Zeichengeräte zum Konstruieren von … Schrägrissen gebrauchen können
Lehrplan 3. Klasse Sek I: Gegenstände, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, zeichnerisch darstellen können
Lehrplan Geom. Zeichnen Sek I: Axonometrische Darstellungen ebenflächig begrenzter geometrischer Körper, spezielle axonometrische Darstellungen; Sichtbarkeitsüberlegungen.
Kartesisches Koordinatensystem, Einführung in ein geeignetes 3D-System.
Schulanwendung bei Herstellung von Skizzen räumlicher Objekte, CAD-Zeichnungen, bei Volumsüberlegungen, in Trigonometrie, bei Extremwertaufgaben

1.1 Projektion

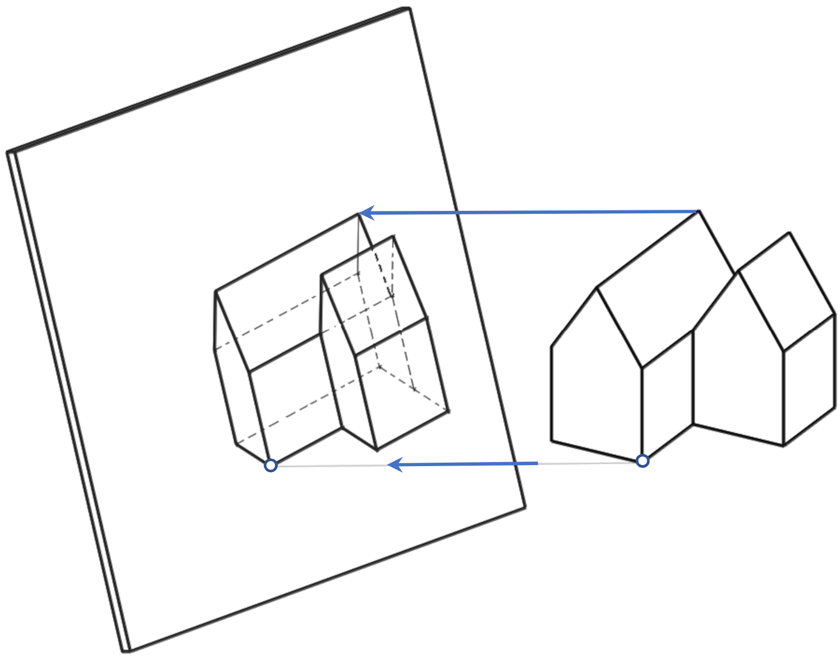
Zunächst: *Wie entstehen solche Bilder räumlicher Objekte?*







Projektion = Abbildung des R3 auf den R2



Durch jeden Punkt P des R3 denkt man sich eine Gerade (*Projektionsgerade, „Projektions-gerade“, „Sehstrahl“*), die mit einer vorgegebenen Ebene (*Bildebene*) geschnitten wird. Dieser Schnittpunkt heißt *Bild von P*, auch Riss von P.

Def. 1.1: **Projektion** ist eine Abbildung	R3 → R2 P (x/y/z) ⟼P*(u/v)

Im Falle einer ***Parallelprojektion*** (auch *Schrägprojektion*) sind alle **Projektionsgeraden zueinander parallel**, aber nicht parallel zur Bildebene. Sind die Projektionsgeraden normal zur Bildebene, so spricht man von ***Normalprojektion***.

Bei einer ***Zentralprojektion*** verlaufen alle **Projektionsgeraden durch einen Punkt**, das *Zentrum* der Projektion, manchmal auch *Augpunkt* genannt.
Das Ergebnis der Projektion, das entstehende Bild, heißt i.a. *Parallel**riss*** oder *Zentral**riss**.*

Allgemeine Eigenschaften beider Projektionen:

(P1) P → P* (i.a. **punkttreu**)

Das Bild eines Punktes ist i.a. ein Punkt. (Ausnahmen: Übungen)

(P2) g → g* (i.a. **geradentreu**)

Das Bild einer Geraden/Strecke ist i.a. eine Gerade/Strecke. (Ausnahmen: Übungen)

(P3) $X \in a \Rightarrow X^* \in a^*$ **inzidenztreu**

Liegt ein Punkt auf einer Geraden („*inzidiert er mit ihr*“), so liegt sein Bildpunkt am Bild der Geraden.

Gilt die Umkehrung von (P3), d.h. $X^* \in a^* \Rightarrow X \in a$? (vgl. 1.4)

1.2 Parallelprojektion

Alle Sehstrahlen sind zueinander parallel.

Abbildung von Punkten

Besondere Lage von AB … in Projektionsrichtung … „projizierende Lage“

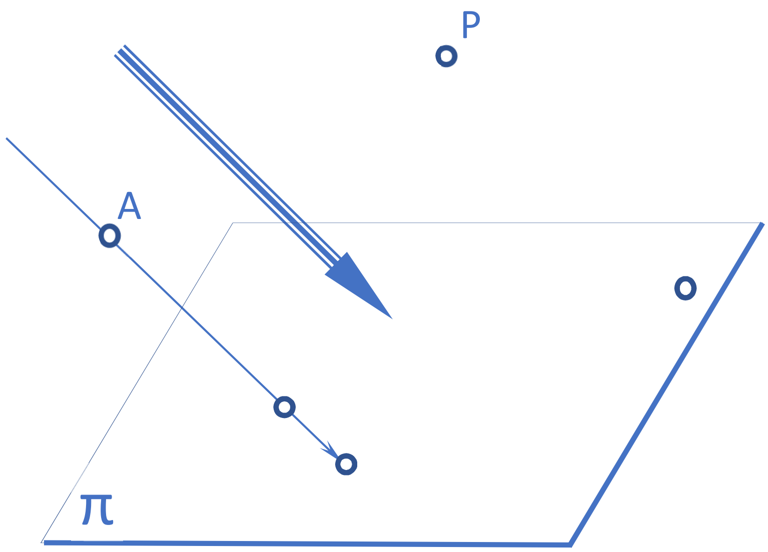
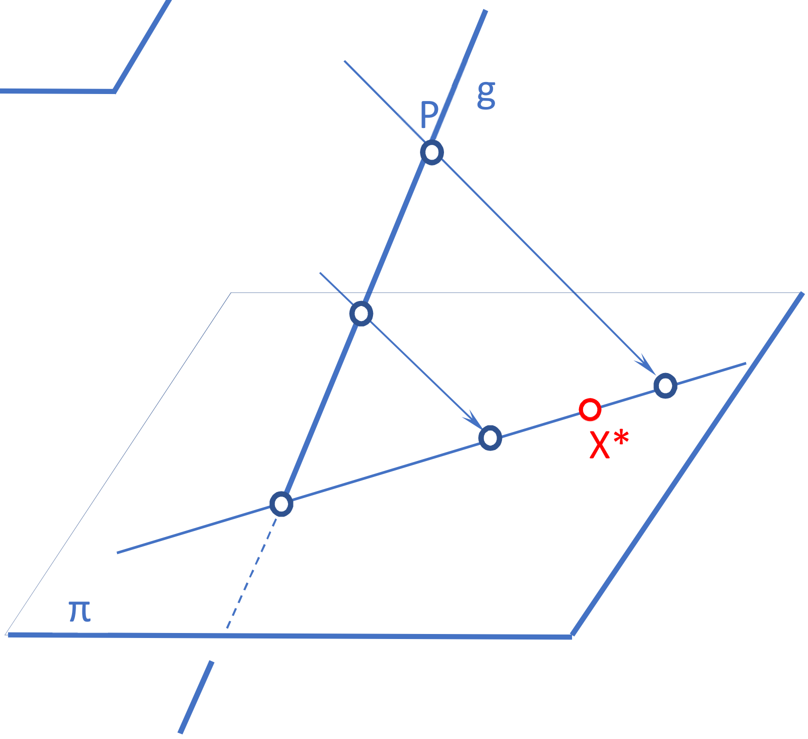


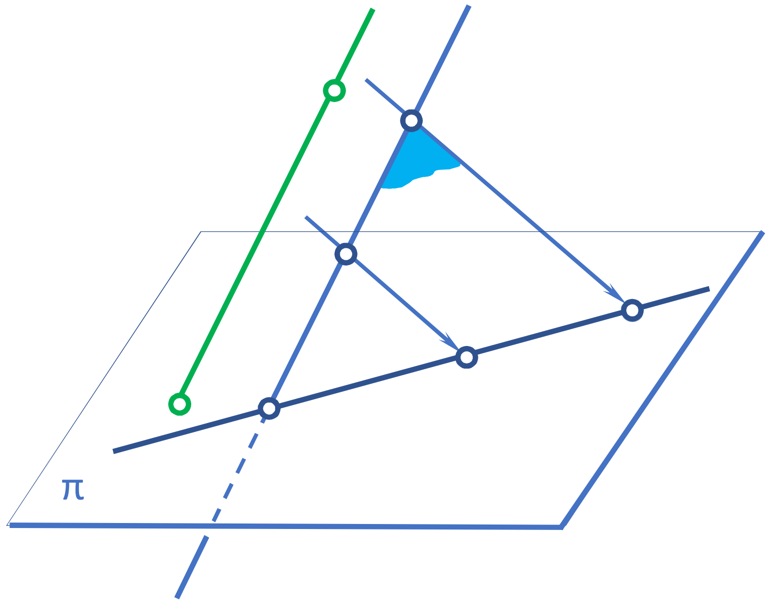
Abbildung von Geraden

G = G* … „Spurpunkt“

Es geht auch im die Inzidenztreue!



Besondere Eigenschaften der Parallelprojektion:

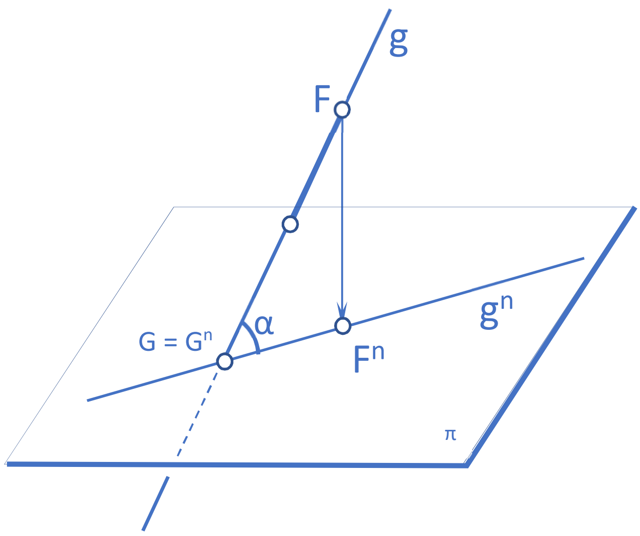


(PP4) **Parallelentreue:** Sind zwei Geraden g und h im Raum parallel, dann sind die Projektionsebenen parallel und deshalb auch die Bilder g^p und h^p der Geraden.
→ Die Parallelprojektion ist **parallelentreu**.

(PP5) **Teilverhältnistreue:** Teilt ein Punkt X eine Strecke PQ in einem bestimmten Verhältnis, so teilt der Bildpunkt X^p die Bildstrecke P^pQ^p im selben Verhältnis.
Insbesondere ist die Abbildung ***mittelpunktstreu***.
(Begründung: 1. Strahlensatz, vgl. 6.2)

Sonderfall: Normalprojektion

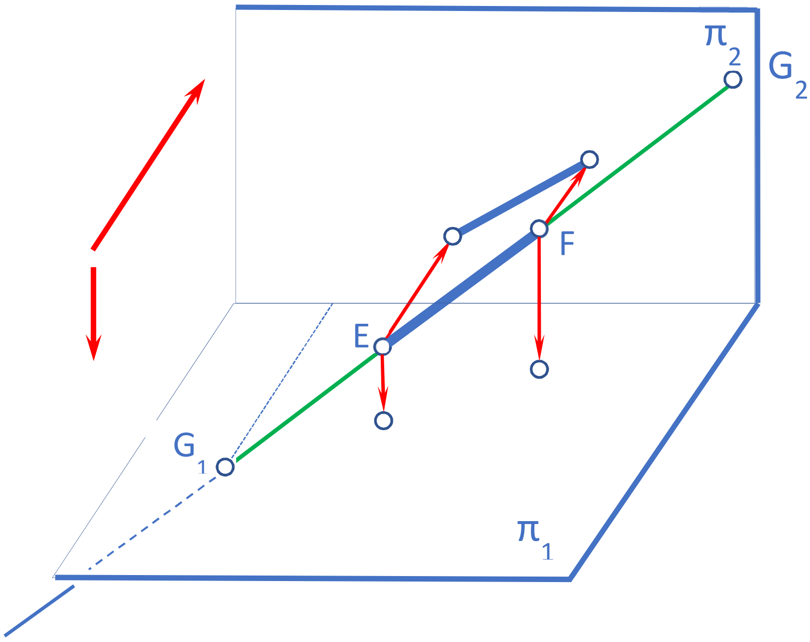
Alle Sehstrahlen/Projektionsgeraden sind normal zur Bildebene.



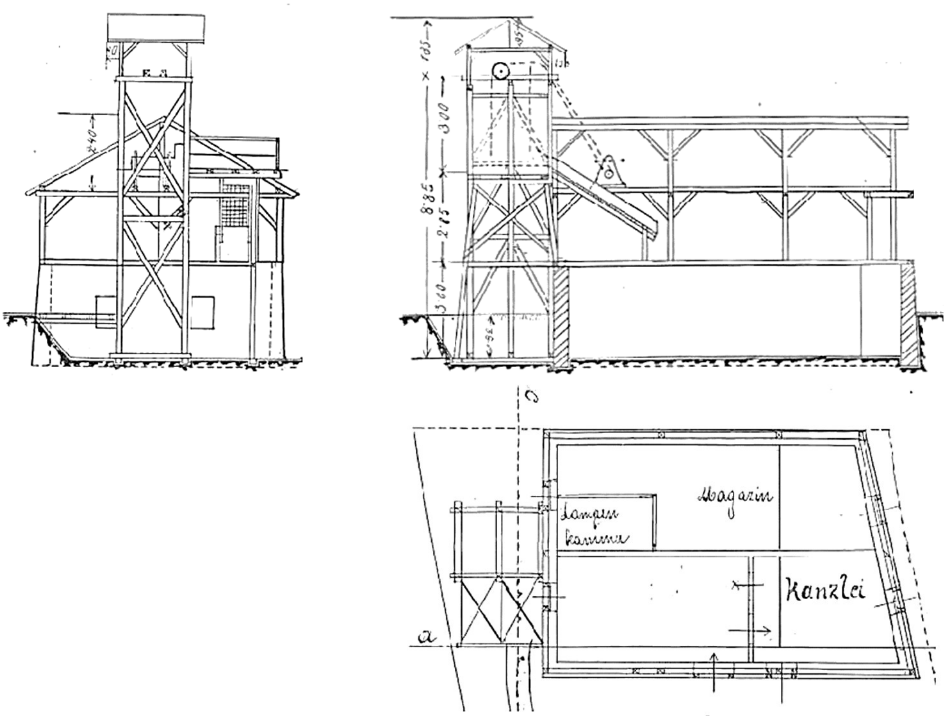
Beachte Länge von e^n =

Sonderfall: Zweibildersystem/Zweitafelprojektion

Zwei Normalprojektionen auf zwei (drei) zueinander normalen Bildebenen bilden die Grundlage des **Grund-und Aufrissverfahrens**, lange Zeit das Standardwerkzeug des Konstrukteurs.



Beispiel: Eine Zeichnung aus dem 1920er Jahren (Förderturm eines Kohlenbergwerks)

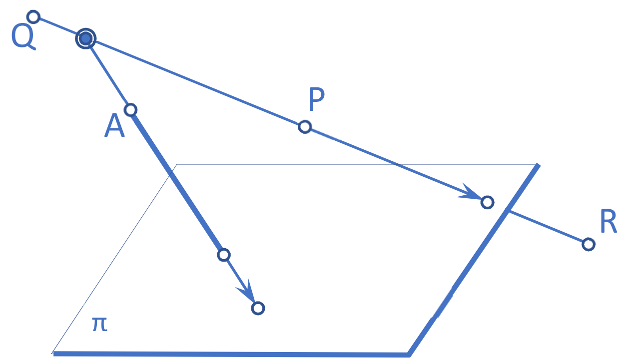


Grundriss

1.3 Zentralprojektion

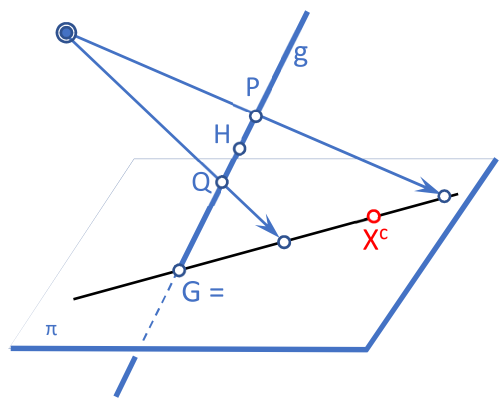
Alle Sehstrahlen gehen von einem festen Punkt („Zentrum“, „Auge“, „Augpunkt“) aus. ($Z \notin \pi$)

Abbildung von Punkten



Hinweis: Da auch Punkten „oberhalb“ von Z (wie Q) und “unterhalb der Bildebene (wie R) Bildpunkte zugeordnet werden sollen, spricht man besonders hier bei der Zentralprojektion besser von Projektions*geraden* als von Seh*strahlen*. „Strahl“ suggeriert ja, dass es lediglich *Halbgeraden* sind, von Z ausgehen. Dann würde z.B. Q keinen Bildpunkt haben können.

Abbildung von Geraden



Beachte z.B. den Halbierungspunkt H mit |HQ| = |HP|.
Gilt diese Gleichheit auch für $|H^cQ^c| = |H^cP^c|$?

Besondere Eigenschaften der Zentralprojektion:

(ZP4) Sind zwei Geraden im Raum parallel, dann sind die Projektionsebenen **nicht** mehr parallel und ebenso sind i.a. die Bilder der Geraden nicht mehr parallel. → die Zentralprojektion ist **nicht paralleltreu**.

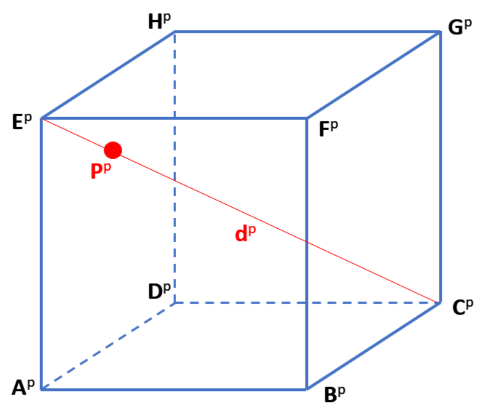
(ZP5) Die **Teilverhältnistreue gilt nicht**. (vgl. Punkt H)

Siehe z.B. Schullehrbuch (11. und 12. Schuljahr):
PILLWEIN G.; ASPERL A., WISCHOUNIG M.: Raumgeometrie Konstruieren und Visualisieren. Wien: Österr. Bundesverlag, 2016

1.4 Zur Umkehrung der Inzidenztreue

Für die Rekonstruktion aus Bildern (das „Lesen" von Zeichnungen) benötigt man die Umkehrung der Abbildung (Projektion, Def. 1.1), also R2 → R3.

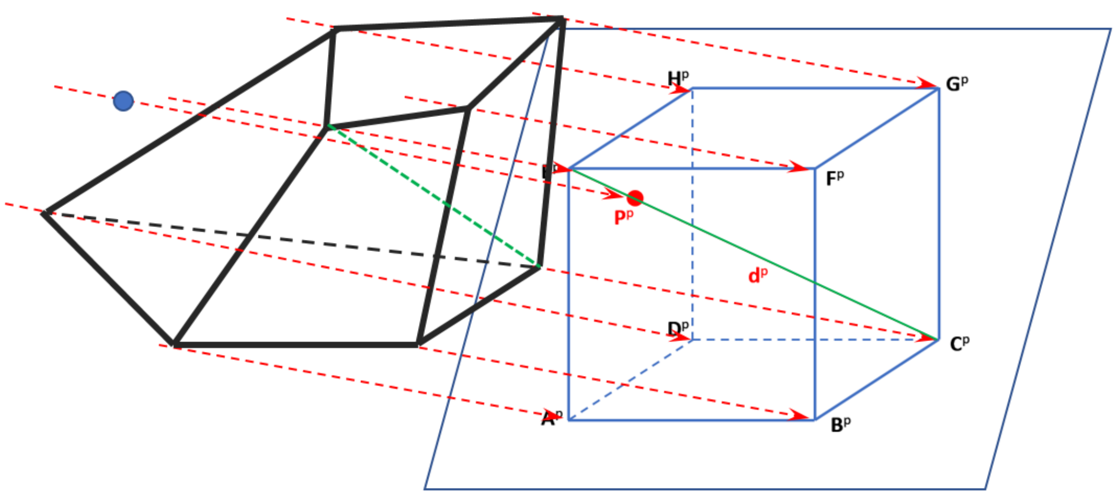
Dies kann wegen der *Nichtgültigkeit der Inzidenztreue* eine Herausforderung betreffend Bildinterpretation darstellen.



Durch Fragen lässt sich die Anschauung schon bei einfachen Darstellungen *erschüttern*:

Z.B.: "Auf welcher Geraden liegt P?"
„Ist das wirklich das Bild eines Würfels?"

Das scheinbare Bild eines Würfels muss tatsächlich nicht von einem Würfel herrühren, es kann von vielen Objekten herrühren, beispielsweise:



→ Vorsicht bei jeder Art von Bild!

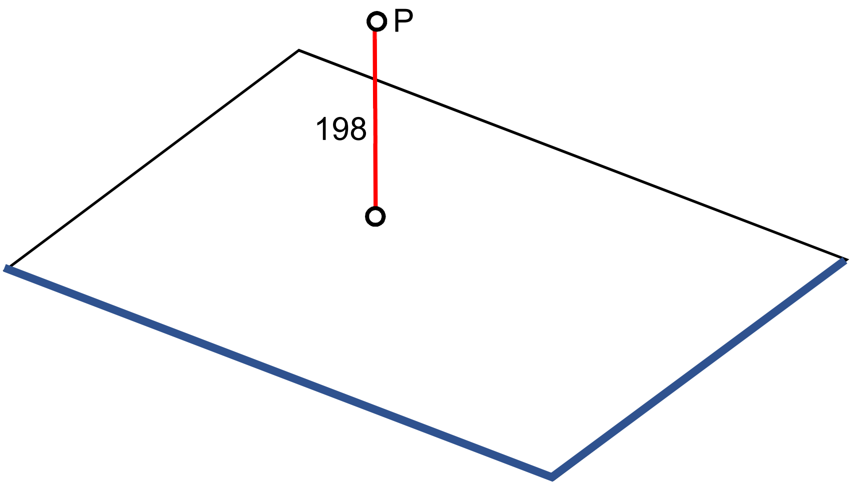
1.5 Weitere Projektionen

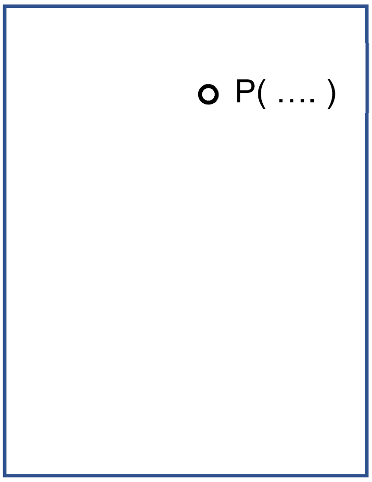
Kotierte Projektion

Jedem Raumpunkt P wird die Normalprojektion P‘ von P auf einer horizontalen Bezugsebene zugeordnet. Der Abstand des Punktes P von der Ebene wird im Bild meist in Klammer angegeben.

Anwendung: Straßenbau, Dachausmittlung, Kartografie

z.B. >>> https://geometrie.uibk.ac.at/elearning/kp.html



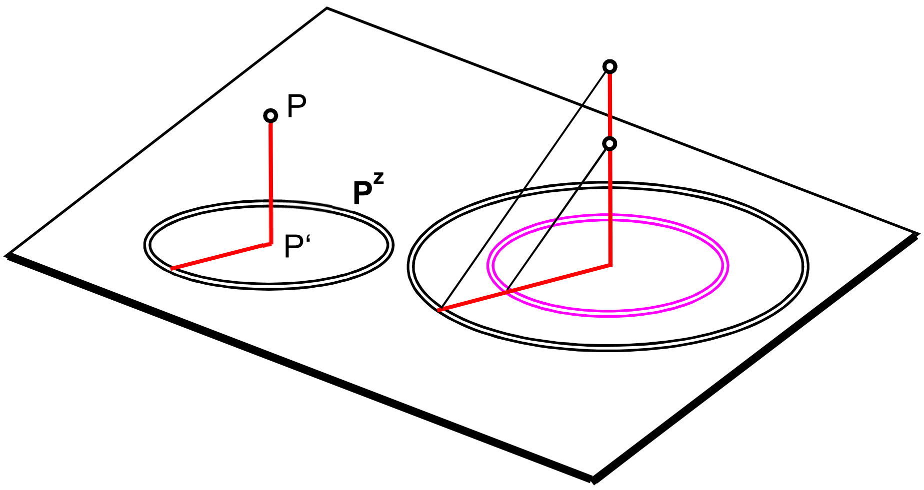


Zyklografie

Jedem Raumpunkt P wird ein Kreis zugeordnet, dessen Mittelpunkt die Normalprojektion P‘ von P auf die Bezugsebene und dessen Radius gleich dem Abstand PP‘ ist.

Anwendung: Optik, Wellenausbreitung

z.B. >>> https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-7091-5999-6_9

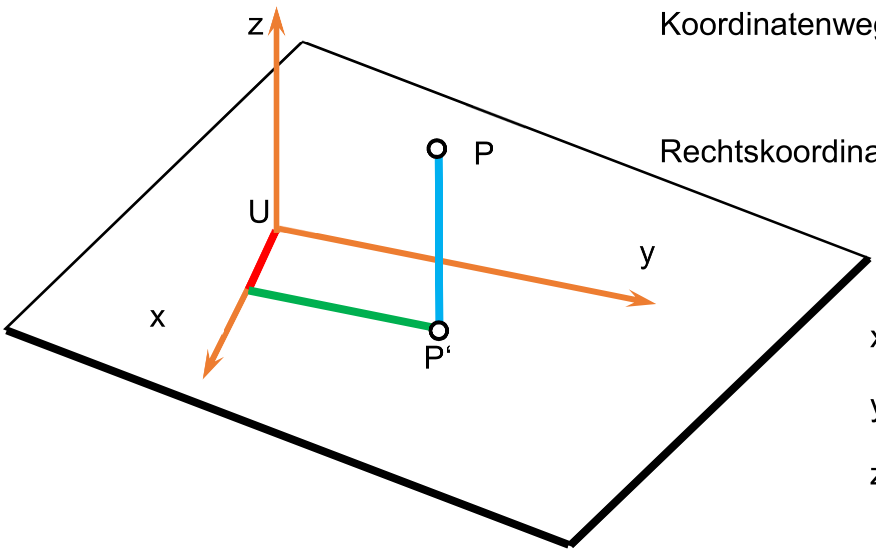


1.6 Raumkoordinatensysteme

Grundlage der Raumgeometrie/analytischen Geometrie in der Schule

Um den Raum nicht nur darstellbar, sondern auch berechenbar zu machen, müssen den Raumpunkten Zahlen zugeordnet werden. Dies kann über ein Bezugssystem realisiert werden. Üblicherweise verwendet man ***lokale kartesische Rechtskoordinatensyteme*** (U; x, y, z), auch (U; E_x, E_y, E_z).Dabei ist U der *Ursprung*, x, y, z die *Achsen* und E_x, E_y, E_z sind die ***Einheitspunkte*** auf den jeweiligen Achsen.

Die Strecken UE_x, UE_y, UE_z heißen ***Einheitsstrecken*** e_x, e_y, e_z.



Koordinatenweg

Rechtskoordinatensystem

x-Achse (rot) =

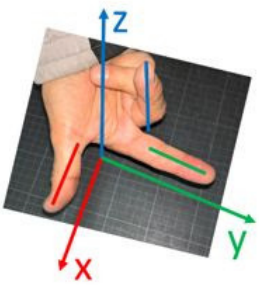
y-Achse (grün) =

z-Achse (blau) =

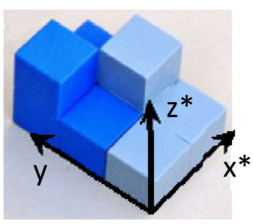
- Idee der Koordinatisierung/Messung – das Normieren (vgl. Leitideen)

Jedem Punkt P wird dann ein *Tripel von reellen Zahlen* zugeordnet, ein ***Vektor*** (x_P, y_P, z_P).
In dieser LV wird zwischen den Punktkoordinaten und dem *Ortvektor* vom Ursprung zum Punkt nicht unterschieden.
Wie oben erwähnt, handelt es sich um ein Rechtskoordinatensystem, deren Achsenanordnung der **Rechten-Hand-Regel** folgt:

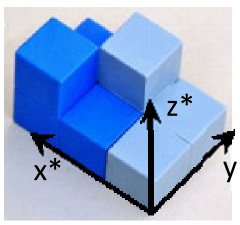
Daumen = x, Zeigefinger = y, Mittelfinger = z



Rechte Hand



Rechtskoordinatensystem



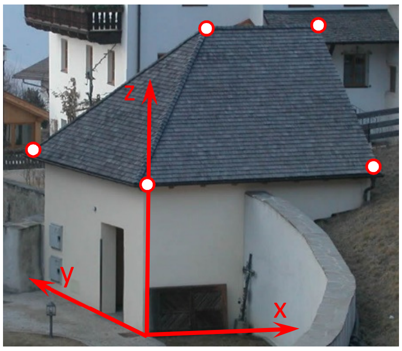
Linkskoordinatensystem

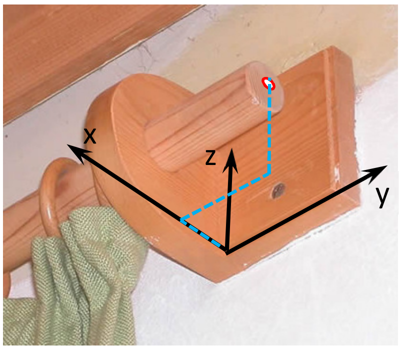
1.7 Axonometrie – Parallelprojektion mit Hilfe eines Koordinatensystems

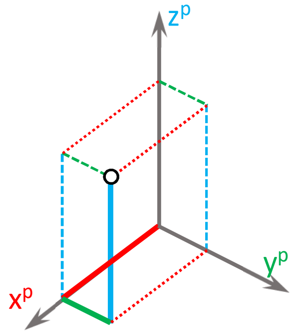
Axonometrische Abbildungsmethode

= Parallelprojektion, bei dem die Bilder der Raumkoordinatenachsen vorgegeben sind. Die Vorgangsweise ist wie folgt:

1. Das abzubildende Objekt wird mit einem Koordinatensystem (U; E_x, E_y, E_z) verknüpft.







2. Der Parallelriss des Koordinatensystems wird entweder durch Angabe der Bilder des Ursprungs und der Einheitspunkte U^p, E_x^p, E_y^p, E_z^p oder durch Angabe der orientierten Achsenbilder x^P, y^P, z^P samt Verzerrungen v_x, v_y, v_z so festgelegt, dass keine der Koordinatenebenen projizierend ist. Die Achsenbilder x^P, y^P, z^P sollen paarweise verschieden sein.
3. Die Risse von Objektpunkten werden über die Risse von Koordinatenwegen eingemessen.

Dieses Verfahren heißt in der *Darstellenden Geometrie* das „**axonometrische Abbildungs-verfahren“** oder kurz **„Axonometrie“.** Das Schöne daran ist, dass – unabhängig davon, wie die drei Achsenrichtungen am Zeichenblatt/Bildschirm gewählt werden – immer (bis auf den Maßstab) ein mögliches Bild des realen Objektes entsteht. Dieser Satz ist als **Satz von POHLKE** (Karl Wilhelm POHLKE 1810 – 1876, Berlin) oder als „**Hauptsatz der Axonometrie**“ in die Geschichte eingegangen.

Satz 1.1 (Satz von Pohlke): Jedes ebene Dreibein (U^p; E_x^p, E_y^p, E_z^p) ist zu einem bestimmten Parallelriss eines vorgegebenen räumlichen Koordinatensystems (U; E_x, E_y, E_z) ähnlich.

Ohne Beweis.

Aus der Schulpraxis:

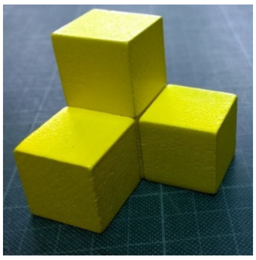
Diese Realisierung einer Parallelprojektion scheint aus der Erfahrung im Unterricht den Schülerinnen und Schülern einfacher zu fallen als die in allen Schulbüchern (leider noch immer) vorgeschlagenen *Schrägrisse* (= Frontalrisse, vgl. unten). Diese scheinen sich durch den Frontalunterricht an den lotrechten Schultafeln bei den früheren Schulbuchautoren in der Community etabliert zu haben. Aus Schülersicht sollten *Horizontalrisse* verständlicher sein, da die Schulhefte ja horizontal liegen. Allgemeine Parallelrisse, wie sie durch die Axonometrie mit der Vorgabe der Bilder von drei orthogonalen Raumrichtungen angegeben werden, haben sich in der eigenen Unterrichtspraxis bei der Darstellung ebenflächig begrenzter Körper besser bewährt als die traditionellen „alten“ Schrägrisse.

Axonometrie – konkret und Schritt für Schritt

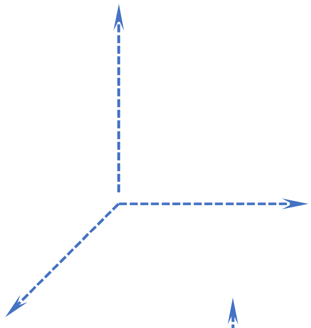
Für den Anfang ist es nicht notwendig, die drei Bilder orthogonaler Raumgeraden als Koordinatenachsen a, y, z zu bezeichnen. Eine Einführung dieser Abbildungsmethode ist ohne dem Raumkoordinatenbegriff ebenfalls möglich.

Schritt 1: Ein Objekt ist gegeben und soll gezeichnet werden

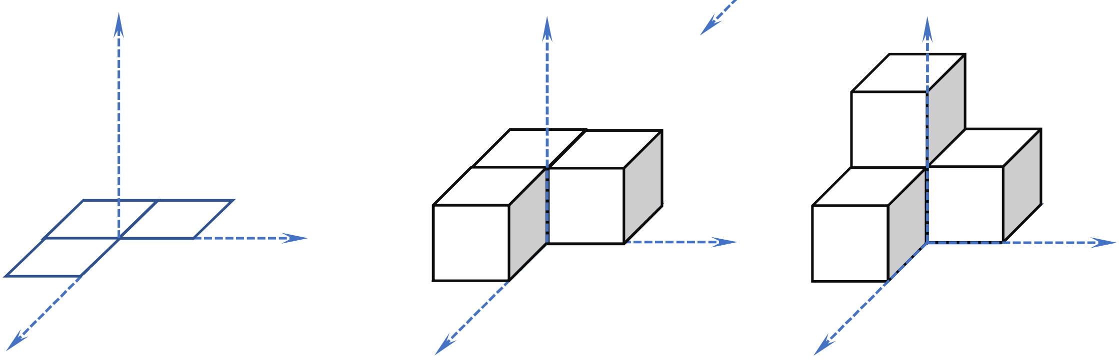
Schritt 2: Man passt ein kartesisches Koordinatensystem an.



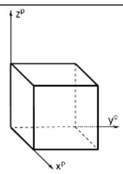
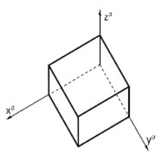
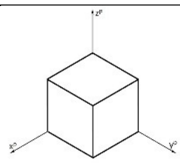
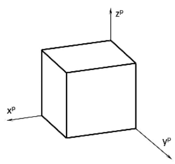
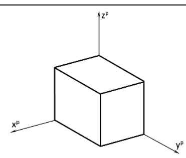
Schritt 3: Man gibt das Bild eines Koordinatensystems (oder dreier orthogonaler Raumrichtungen) vor.



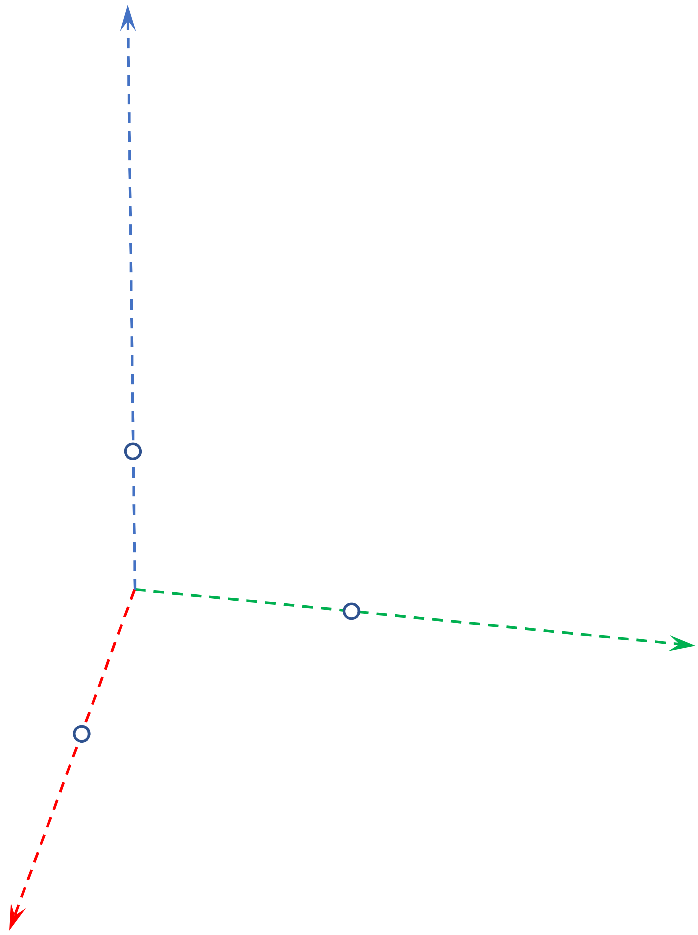
Schritt 4: Man zeichnet das Objekt im Aufbauverfahren.



Im technischen Bereich haben sich spezielle Angaben für Winkel und Verzerrungsverhältnisse im Laufe der Zeit historisch und aus normungstechnischen Gründen etabliert. (ÖNORM 6061)

				
Frontalriss *früher: Kavalierriss*	**Horizontalriss** *früher: Militärriss*	**Isometrie** *(Normalprojektion)*	**Dimetrie** *(Normalprojektion)*	**Trimetrie** *(Normalprojektion)*
$V_x = (0{,}5)$ $V_y = 1$ $V_z = 1$	$V_x = 1$ $V_y = 1$ $V_z = (0{,}5)$	$V_x = 1\ (0{,}816)$ $V_y = 1\ (0{,}816)$ $V_z = 1\ (0{,}816)$	$V_x = 1$ $V_y = 0{,}5$ $V_z = 1$	$V_x = 0{,}65$ $V_y = 0{,}86$ $V_z = 0{,}92$
$\sphericalangle x^p z^p = (135°)$ $\sphericalangle y^p z^p = 90°$ $\sphericalangle y^p z^p = (45°, 135°)$	$\sphericalangle x^p y^p = 90°$ $\sphericalangle x^p z^p = (120°)$ $\sphericalangle y^p z^p = (150°)$	$\sphericalangle y^p z^p = 120°$ $\sphericalangle x^p z^p = 120°$	$\sphericalangle x^p z^p = 97°$ $\sphericalangle y^p z^p = 131{,}5°$	$\sphericalangle x^p z^p = 105°$ $\sphericalangle y^p z^p = 120°$
Kugelbild = Ellipse		**Kugelbild = Kreis**		

Aufgabe 1.1: Zeichnen Sie das Bild des in der Präsentation gegebenen Objekts.
Wie lauten die Koordinaten des Punktes mit dem längsten Koordinatenweg?



Alternativkonstruktionen mittels digitaler Mittel (vgl. Moodle-Plattform)
GAM (Generieren – Abbilden – Modellieren, **www.gam3d.at**)

Geogebra (**www.geogebra.org**/download?lang=de)

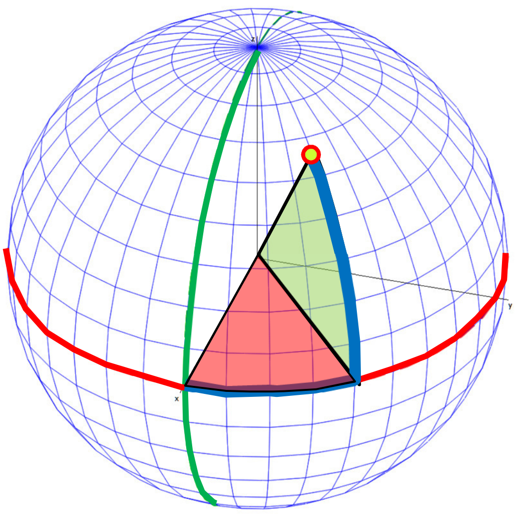
Sketchup Make (**www.sketchup.com**/de/download/all#de)

1.8 Weitere Koordinatensysteme

Kugel-Koordinatensystem

z.B. auf der Erdkugel

Koordinatenweg

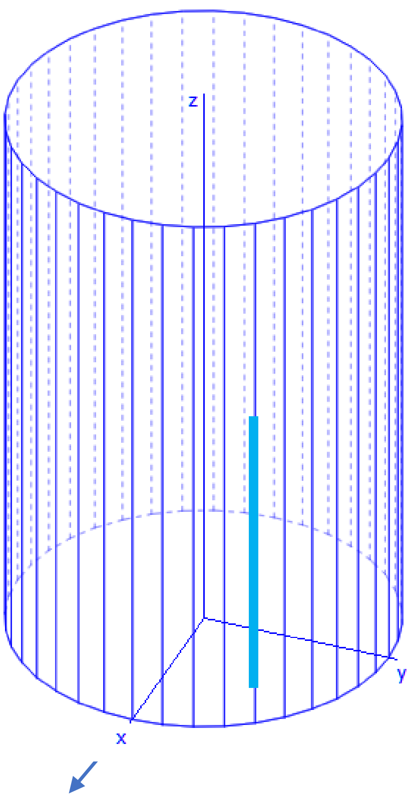


Punkt auf Erdoberfläche:

P(r =   / λ =   ° östl./ μ =   ° nördl.)

Wien (16° östl / 48° nördl)

Zylinder-Koordinatensystem



P (r / λ / z)

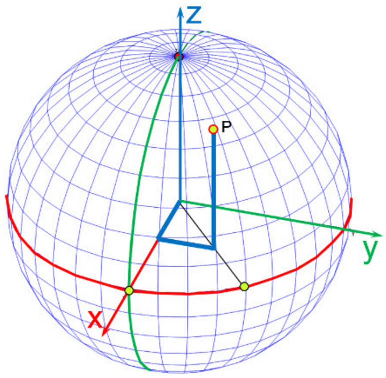
Geodätisches Referenzsystem „Geometrie = Erdmessung“

Gibt es auch ein „wirkliches“ Koordinatensystem, in dem unsere Umgebung erfasst wird?

Neben dem aus der Geografie bekannten Kugelkoordinatensystem für die Erde (geogr. Länge/geogr. Breite) gibt es in Österreich bis jetzt für Osten, Mitte, Westen jeweils eigene Koordinatensysteme, um vermessene Punkte („Festpunkte“ und z.B. Grenzpunkte) festzuhalten (System MGI). An der Umrechnung der Koordinaten in das System ETRS89 von rund 240 000 Festpunkten Österreichs wird gearbeitet. (→ www.bev.gv.at)

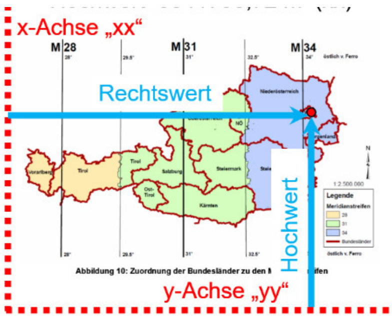
Beispiel Votivkirche in Wien, vermessener Punkt „G1“, Gabelpunkt:

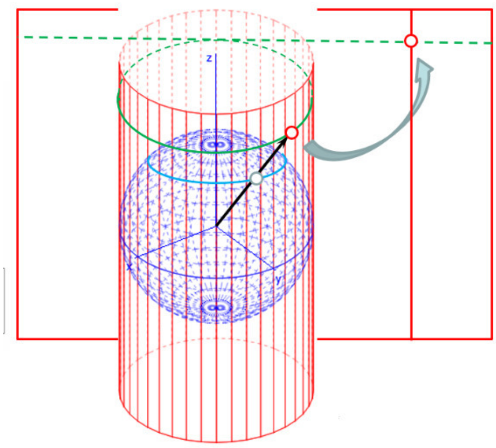
System ETRS89 (Europäisches Terrestrisches Referenzsystem 1989)
Umstellung aller vermessener Punkte Österreichs soll bis 2019 abgeschlossen sei



KZ	X [m]	Y [m]	Z [m]	Breite [° ' "]	Länge [° ' "]
G1	4085739,171	1199254,524	4732972,167	48° 12' 52,39360"	16° 21' 29,25676"

System MGI (Militärgeographisches Institut)
UTM-Koordinaten (Universal Transverse Mercator)
Rechtswert (vom Nullmeridian) aus:
Hochwert (vom Äquator aus):





>>> www.bev.gv.at (Bundesamt für Eich-und Vermessungswesen)

2. Schlüsselstelle: „Einsichten in die Grundlagen“

Ein erster Schritt in die relationale Geometrie …

Fachmathematik-Fulmek-Skriptum: „Axiome“ (p 4) | „Axiomatische Geometrie“ (p 181f)
Internetsuchtipps: Axiome der Geometrie, Nichteuklidische Geometrie, …
Lehrplan 1. – 4. Sek I: … grundlegendes mathematisches Wissen und Können erwerben und abstraktes Denken und formale Fähigkeiten entwickeln. … im präzisen Arbeiten und Argumentieren ausgebildet werden und mit mathematischen Darstellungsformen vertraut werden, … Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewinnen
Schulanwendung in Beweisen, beim Reden über Geometrie

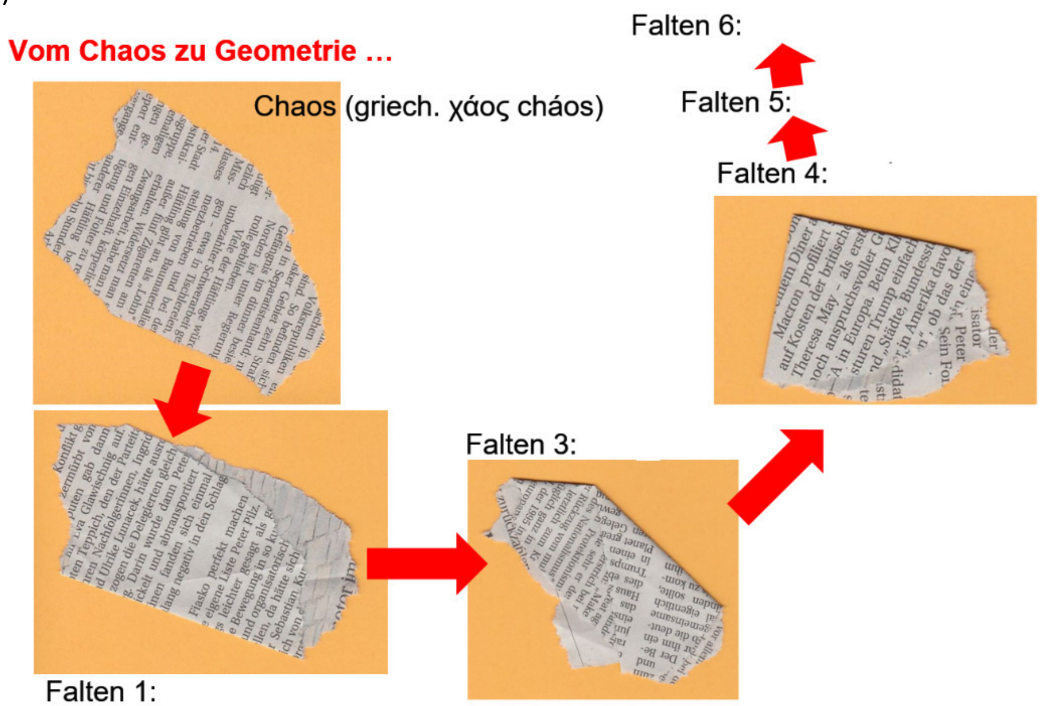
Im Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 181f wird auf die Axiome der Geometrie eingegangen. In diesem Abschnitt wird schwerpunktmäßig (nach [SCHUPP 1977, p 9ff]) ein Weg von der zeichnenden Geometrie aus beschrieben, der auch in der Schule eingeschlagen werden könnte, allerdings noch nicht in allen Details in der 5. Schulstufe.

Mögliche Konzepte für die Unterrichtspraxis, alle handlungsorientiert:

(1) Falten: Vom Chaos zur Geometrie
(2) Von den Raumobjekten zu den Grundlagen
(3) Zeichnen: Vom Zeichnen zur Axiomatik (Axiomatik für die 10-Jährigen?)

… vgl. Schullehrbücher der 5. Schulstufe

Ad (1)



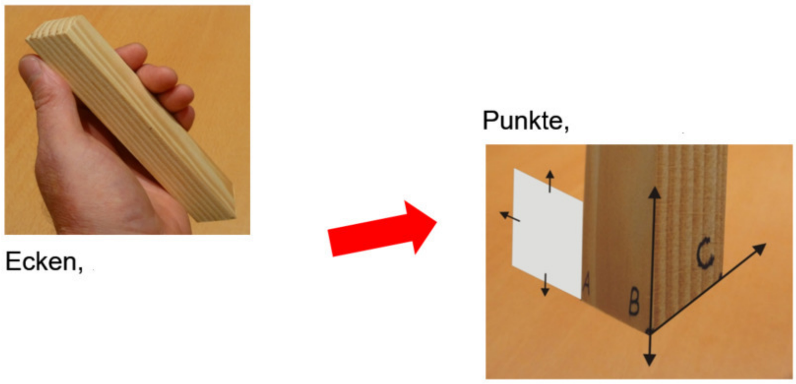
Vgl. Zusatzskript „Aus dem Chaos durch Falten zu Ordnung und Struktur“ (→ MOODLE)

Ad (2) An-***schau***-lich be-***greif***-bare Geometrie …

Vom erlebten Raum zur Geometrie …

„Geometrie-Unterricht kann nur sinnvoll sein, wenn man die Beziehungen der Geometrie zum erlebten Raum ausnutzt."

Hans Freudenthal (1905 – 1990)
niederländischer Mathematiker und Wissenschaftsdidaktiker

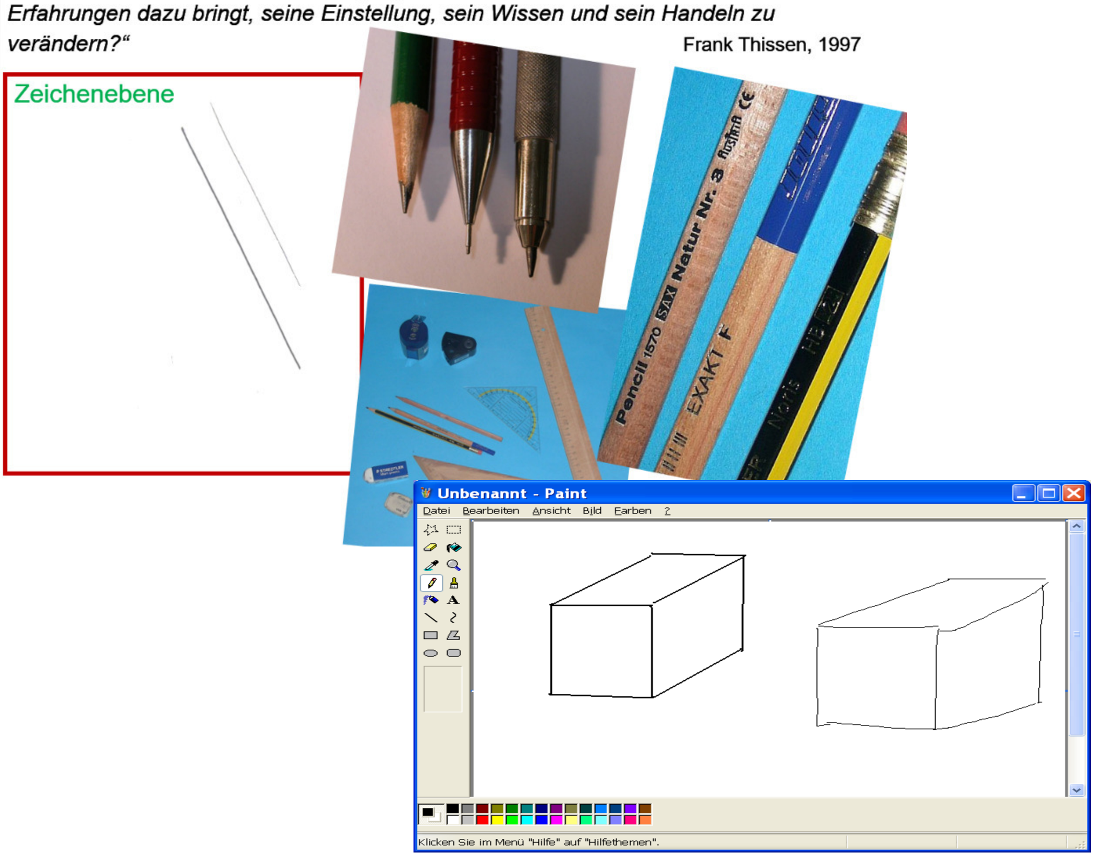


Ad (3)

Vom Zeichnen zur Geometrie …

„Ist Lernen nicht ein natürlicher Vorgang, der einen Menschen durch Erlebnisse und Erfahrungen dazu bringt, seine Einstellung, sein Wissen und sein Handeln zu verändern?"

Frank Thissen, 1997



Die Bilder räumlicher Objekte entstehen in der (theoretisch unbegrenzten) *Zeichenebene.* Sie soll hier Π (PI) genannt werden. Praktisch kann man sich darunter ein ebenes Blatt Papier, eine Schultafel, einen Computerbildschirm, eine Tischplatte, ein Sandbeet, ... vorstellen.

2.1 Punkte, Geraden, Strecken

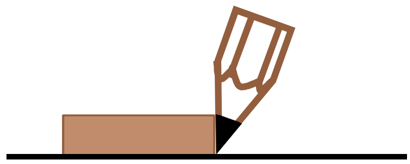
Wir sammeln nun beim aufmerksamen Zeichnen Eigenschaften (E), die als gemeinsame Basis einem möglichst „exakten“ Aufbau der Geometrie dienen können, wir schaffen uns unser „Theorie-Geometrieland“:

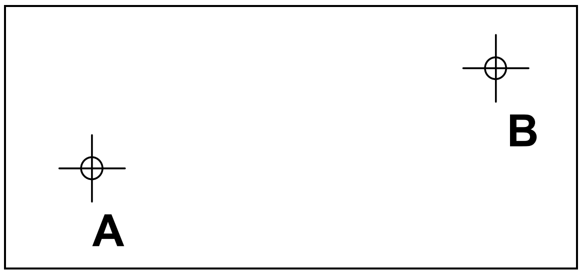
*E1 Es gibt unendlich viele Punkte in Π.

Punkte bezeichnen wir in der Folge mit Großbuchstaben: A, B, C, …
Achtung: Wir haben nicht erklärt, **was** man unter einem *Punkt* versteht.
Bemerkung: Symbole der *Mengenlehre* dienen uns zur Vereinfachung und Verkürzung der sonst oft umständlichen Schreibweise, z.B. „ϵ“ statt „ “

Wir wählen zwei Punkte A $\in \Pi$ und B $\in \Pi$: Durch sie kann man eine *zusammenhängende* Linie (= *Punktmenge*) legen. Die Punkte A und B liegen auf dieser Linie, man sagt, sie ***inzidieren*** mit dieser Linie. (Natürlich gibt es *viele* Linien durch diese zwei Punkte.)

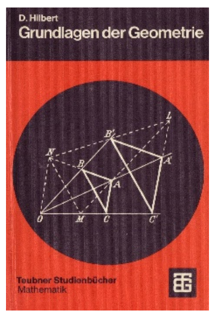
Eine Linie kann mit Hilfe eines Lineals eine *gerade Linie* werden. Würde man diese gerade Linie an beiden Enden unbegrenzt verlängern (können), so würden eine **Gerade** entstehen. Praktisch lässt sich wegen des endlich langen Lineals nur ein Teil davon zeichnen. Diesen Teil nennen wir **Strecke.**





Wir erkennen:

*E2 Durch zwei verschiedene Punkte führt genau .... Gerade.
[HILBERT: Axiom der Verknüpfung I1/I2]

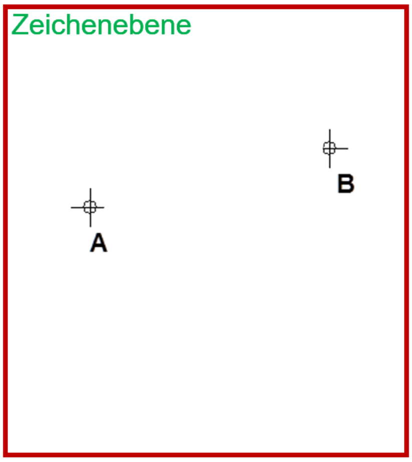


Hinweis: *Der Verweis [HILBERT: …] bezieht sich auf das Werk*
[HILBERT, David: Grundlagen der Geometrie, 1899 erstmals erschienen]
>>> Internetsuche etwa nach „Hilbert Grundlagen Geometrie digital“

*E3 Auf jeder Geraden gibt es mindestens .... Punkte.
[HILBERT: Axiom der Verknüpfung I3, 1. Teil]

*E4 Außerhalb jeder Geraden liegt mindestens .... Punkt.

[HILBERT: Axiom der Verknüpfung I3, 2. Teil]



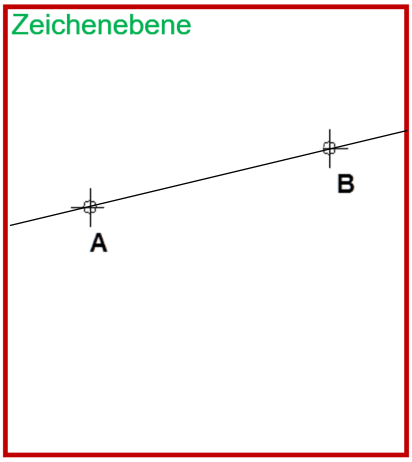
Wir zeichnen eine Gerade durch A und B (eigentlich nur einen Ausschnitt davon):

Man erkennt beim Beobachten des Streckenzeichnens:

*E5 Die Punkte einer Geraden lassen sich ordnen.

Def. 2.1.: Wir schreiben A **<** B für A "**vor**" B, d.h., wenn A **(zeitlich) vor** B gezeichnet wurde.

*E6 Auf der Geraden AB mit A < B gibt es Punkte P, Q, R mit P … A, A … Q … B, B … R



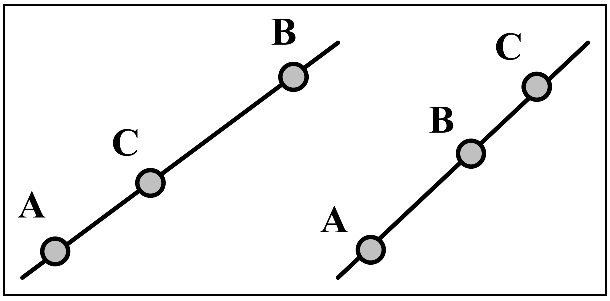
Eigenschaften der <-Relation:

Zeichnet man auf einer Geraden g zwei Punkte X und Y ein, dann gilt eine der drei Beziehungen

X = Y oder X < Y oder Y < X

Diese Eigenschaft heißt die ***TRICHOTOMIE*** der <-Relation.

Wir betrachten nun drei Punkte auf einer Geraden g:



Wenn A < B und B < C gilt, dann folgt daraus A … C

Dies nennt man die ***TRANSITIVITÄT*** der <-Relation.

Die bisher gesammelten Eigenschaften mussten nicht näher begründet werden, sie waren "jedem" anschaulich klar. Auf diesen Grundsätzen - auch *Axiome* genannt - wird nun aufgebaut.

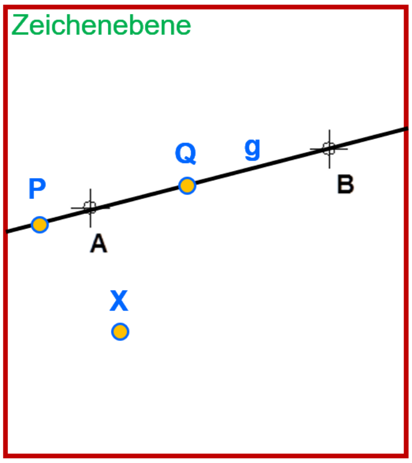
Zusatzaufgabe: Die hier angeführten Eigenschaften haben die Charakteristik eines Axioms. Sie sind anschaulich klar und prägnant, können/wollen nicht bewiesen werden. Vergleiche diese Eigenschaften mit dem Axiomensystem von EUKLID und jenem von David HILBERT. [Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p181ff)
Welchen Axiomen entspricht E1? usw.

Beispiele für *Folgerungen* aus diesen Axiomen:

Satz 2.1: Auf jeder Geraden liegen unendlich viele Punkte.

Begründung (indirekt):
Denn, *gäbe* es nur endlich viele Punkte auf einer Geraden g, dann würden sich diese nach *..... ordnen lassen und bei endlich vielen gäbe es dann einen *"ersten"* und einen *"letzten"* Punkt, nennen wir sie kurz E und L.
Dies führt aber zu einem *Widerspruch* mit *..... , nach dem es zu zwei Punkten A und B auf einer Geraden ja auch Punkte P mit P < A und R mit B < R gibt. Dies gilt auch für E und L: Dann ist aber E nicht mehr der erste Punkt, weil P vor E liegt, genauso ist L nicht der letzte.
Hinweis: *Diese - sehr ausführlich - beschriebene Begründung stellt einen **indirekten Beweis** dar: Man nimmt das Gegenteil der zu beweisenden Tatsache* (unendlich viele) a*n und zeigt dann, dass dies im **Widerspruch** zu einem anderen allgemein akzeptierten Axiom steht.*

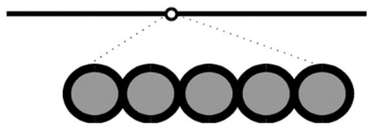
Satz 2.2: In der Ebene liegen unendlich viele Geraden.



Begründung:
Sei g eine Gerade und X ein Punkt außerhalb von g.
Nun betrachten wir alle Geraden durch X und je einen Punkt von g.
Nach .... gibt es unendlich viele Punkte auf g, demnach auch gleich viele Geraden durch X.
Könnten alle diese Geraden zusammenfallen? ....
Denn fielen zwei solche Geraden XP und XQ zusammen, so gingen durch P und Q zwei Geraden, nämlich g selbst und XPQ. Das wäre aber ein Widerspruch zu E2: Durch zwei verschiedene Punkte führt genau **eine Gerade**.

q.e.d.

Auf Grund welcher Eigenschaft darf man sich die Punkte auf einer Geraden **nicht** wie **Perlen auf einer Schnur** vorstellen?



*......

Begründung: Angenommen, es wäre so, …
… dann wählen wir zwei Nachbarperlen/Punkte X und Y
Widerspruch zu …

Satz 2.3: Die Punkte einer Geraden liegen *dicht*.

Bekannt ist diese Tatsache von den rationalen Zahlen her, die auf der Zahlengeraden dicht liegen. („Zwischen je zwei Bruchzahlen liegt stets eine weitere.“)

Eine **gerade Linie** wurde mit Hilfe eines Lineals (vgl. E2) gleichsam definiert. Geht man von den eigentlich nicht definierten Begriffen ***Punkt*** und ***Gerade*** aus, so können mit Hilfe der < - Relation die Begriffe ***Strecke*** und ***Strahl*** genauer gefasst (definiert) werden:

Def. 2.2: **Strecke** („Stück einer Geraden mit erstem und letztem Punkt")

$$AB = \{X \mid (X = A) \vee (X = B) \vee (A < X \wedge X < B)\}$$

Schreibweisen: $\overline{AB}$, auch **[AB]** oder nur **AB** (wenn klar ist, was gemeint ist.)
Analog zu Satz 1 kann man zeigen, dass auch eine Strecke unendlich viele Punkte enthält.

Def. 2.3: ***Strahl*** („Halbgerade")

$$AB = \{X \mid (X = A) \vee (A < X)\}$$

Schreibweisen: $\overrightarrow{AB}$**,** auch **[AB)** oder nur **AB** (wenn klar ist, was gemeint ist.)
Jeder Punkt einer Geraden teilt diese in zwei Halbgeraden.

Punkt und **Gerade** sind (wie schon angedeutet: nicht definierte) ***GRUNDBEGRIFFE***,
Strecke und **Strahl** daraus ***abgeleitete Begriffe***.

Ebenso: Ein ***Streckenzug*** entsteht durch Aneinandersetzen von Strecken.

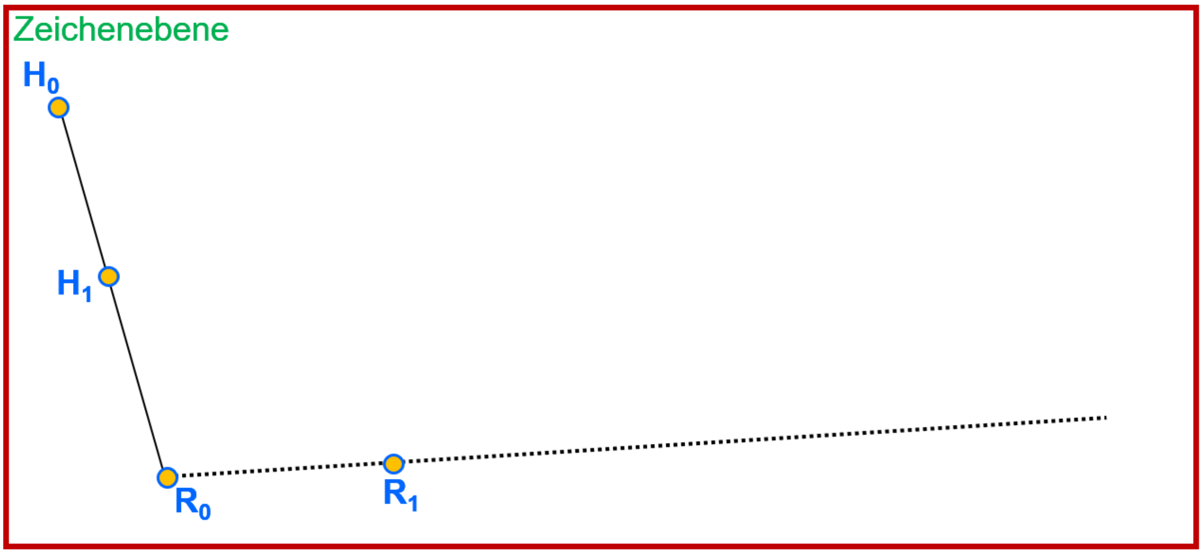
Dreieck ABC =

Polygon (Vieleck, wörtlich „Vielseit“) =

2.2 Konstruktiv-Zeichentechnisches

Aufgabe 2.1: *Konstruktion eines Streckenzuges*

Ein Hund (Position H) sieht einen Radfahrer (Position R) und läuft auf ihn zu. Nach einer Sekunde hat der Hund eine bestimmte Strecke zurückgelegt, dann schaut er wieder auf den Radfahrer, der aber seinerseits ein Stück weitergefahren ist. Der Hund läuft nun auf diese neue Position des Radfahrers zu. Auf diese Art und Weise kann man die **Verfolgungskurve** durch einen Streckenzug annähern. Vorausgesetzt wird außerdem, dass sich beide mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.



Ergänzung zu Aufgabe 2.1: Internetrecherche nach *Radiodrome*, *Hundekurve*, …

Bei diesem Beispiel wurde ein Zirkel nur zum gleichmäßigen Streckenübertragen verwendet.

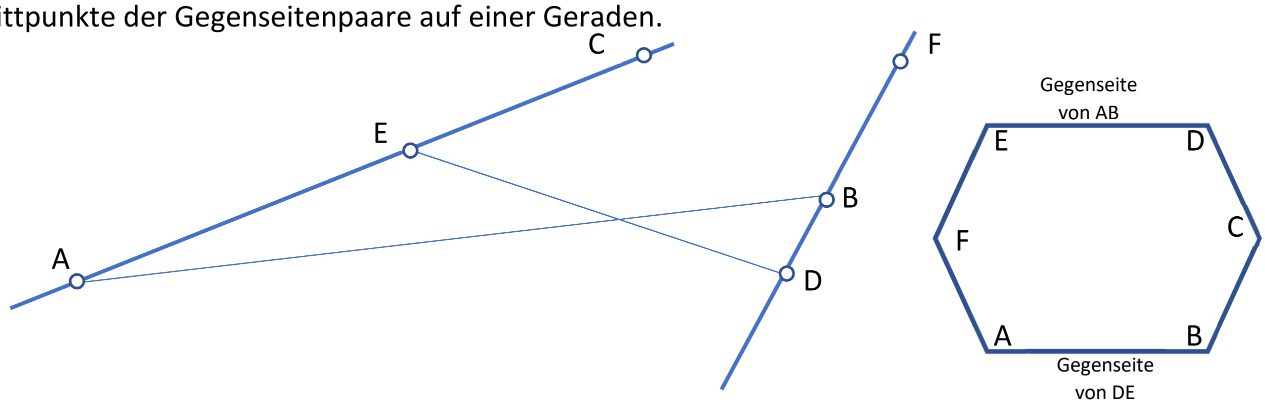
Frage: Lässt sich **ein Punkt** überhaupt zeichnen? → Erschütterung der Anschauung

Techniker/Vermessungstechniker zeichnen Punkte meist als „Nullenkreise" (= Kreise mit kleinstem Radius, deren nicht gezeichneten Mitten die eigentlichen Punkte darstellen.) Dazu gab/gibt es eigene Zirkel „Nullenzirkel". >>> http://www.geometry.at/nostalgieausstellung/Zeichengeraete

Zusätzlich bieten sich klassische Sätze, bei denen es hauptsächlich um Geraden geht, zum Nachkonstruieren an, z.B.:

Aufgabe 2:2: *Satz von PAPPUS (4. Jhdt., Alexandria), ohne Beweis*

Liegen die Eckpunkte eines Sechsecks ABCDEF abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Geraden.



Hinweis: *Dies ist ein Satz der sogenannten* ***Projektiven Geometrie****, weil er auf keinerlei Maßbestimmung und keine Parallelitäten aufbaut. Blaise PASCAL (17. Jhdt.) fand heraus, dass der Satz auch gilt, wenn die Ecken des Sechsecks auf einem Kegelschnitt liegen.*

3. Schlüsselstelle „Messen“ (Länge, Winkel, Fläche, Volumen)

Was bedeutet „Messen“? … **Messen ist Vergleichen**

Den Maßbegriffen sind drei Eigenschaften gemeinsam: die *Invarianz* kongruenter Figuren/Körper und die *Additivität* (Größe einer Figur ist gleich der Summe der Größen der Teilfiguren) und das *Messen* selbst.

Fachmathematik-Fulmek-Skriptum: „Winkel“ (p 13ff Def 1.3.1) | „Fläche“ (p 57ff) | „Orientierter Inhalt“ (p 151) | „Messung“ (p 189)

Internetsuchtipps: Längenmaß, Winkelmaß, Volumsberechnung, Flächen, Elemente EUKLID

Lehrplan Sek I: Räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen durchführen können

Lehrplan 1. Klasse Sek I: Formeln für diese Umfangs-, Flächen- und Volumsberechnungen aufstellen können; Winkel im Umfeld finden und skizzieren, Gradeinteilung von Winkeln kennen, Winkel mit dem Winkelmesser (Geodreieck) zeichnen können;

Lehrplan 2. Klasse Sek I: Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen, Volumina von Prismen berechnen, möglichst in Anwendungsaufgabe

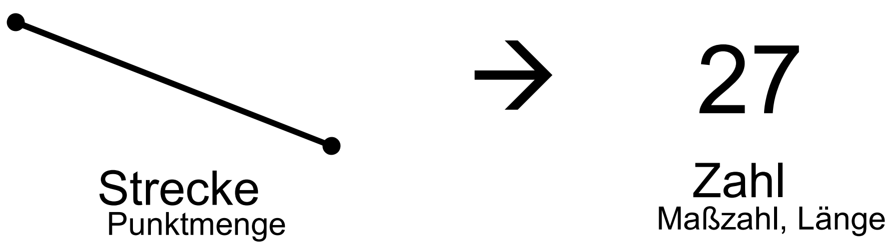
Lehrplan 3. Klasse Sek I: Formeln für Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken begründen und damit Flächeninhalte berechnen können, Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht von Gegenständen, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, berechnen können

Lehrplan 4. Klasse Sek I: Schranken für Umfang und Inhalt des Kreises angeben können, Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können, Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen herleiten und anwenden können; Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können

Schulanwendung bei allen Maßberechnungen, bei Optimierungen/Extremwertaufgaben

3.1 Längenmessung

➔ Vgl. Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 5

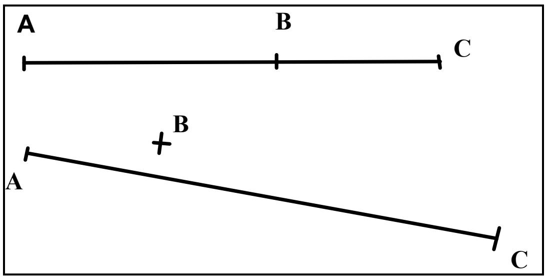


Dazu legt man vorerst fest:

(E7) **LÄNGE (ENTFERNUNG) = Zahl AB**, die irgend zwei Punkten A und B zugeordnet wird, und folgende Eigenschaften hat:

- E7.1 AB > 0 (Länge ist nicht negativ)
- E7.2 AA = 0, AB = BA
- E7.3a AB + BC = AC für B $\in$ AC
- E7.3b AB + BC > AC für B $\notin$ AC

Die letzten beiden Beziehungen bilden die **Dreiecksungleichung.**



Hinweis: *Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wird für die Länge einer Strecke AB oft statt |AB| oder besser* $|\overline{AB}|$ *nur AB geschrieben.*

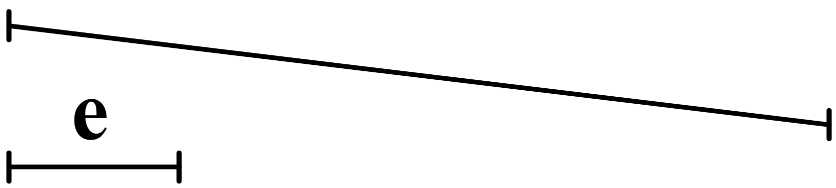
Deshalb wird in diesem Skriptum die **Schreibweise AB** sowohl für die **Gerade** durch A, B und dem **Strahl** mit Anfangspunkt A durch B als auch für die **Strecke** mit den Endpunkten AB und der **Länge der Strecke** AB verwendet. In den Schullehrbüchern wird - didaktisch günstiger - zwischen AB (Gerade) und $\overline{AB}$ (Strecke) [oder genauer (AB) = Strecke und $\overline{AB}$ = Länge der Strecke] unterschieden.

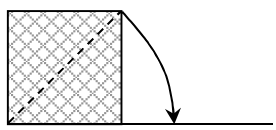
Synonyme für „Länge“: Distanz, Entfernung

Wie wird der Zahlenwert | $\overline{AB}$ **| für** $\overline{AB}$ **nun tatsächlich erhalten?**

Man gibt eine bestimmte **Einheitsstrecke e** (z.B.: 1 m, 1 cm, 1 Fuß, 1 Meile, ...) vor und schaut, wie oft diese in der zu messenden Strecke AB enthalten ist. Dies kann z.B. durch Abtragen dieser Strecke e mit dem Zirkel geschehen.

Enthält die Strecke AB ein ganzzahliges Vielfaches der Strecke e oder ist sie durch Teiler von e oder deren Vielfache *messbar*, so heißen e und AB **kommensurabel**, ansonsten **inkommensurabel** (z.B.: e = 1 cm, AB = Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge e).





Erst nun nach Einführung des Längenbegriffes ist folgende Definition sinnvoll:

Def. 3.1: Ein ***Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r*** sind alle Punkte, die von M die Entfernung r haben.

3.2 Winkelbegriff

➔ Vgl. Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 12ff

Wie definiert man die Winkelgröße, Drehung von einem Strahl in den anderen?

Winkeldefinition

Prinzipiell verschiedene Konzepte (im Schulunterricht)

Winkel = Bogenlänge am Einheitskreis, vgl. auch [Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 12]

>>> **Winkel = zahlenbasiert** (für den Schulunterricht weniger geeignet)

Winkel = Zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen

HILBERT (p 13) Winkel = „System zweier Halbstrahlen, die von einem Punkt ausgehen"

>>> Winkel = strahlenbasiert

Winkel = von einem Strahl überstrichene Fläche bei Drehung um den Anfangspunkt.

Winkel = Durchschnitt zweier Halbebenen

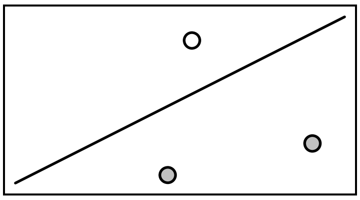
>>> Winkel = flächenbasiert

Problematik: Winkel als „Punktmenge" (2 Strahlen, Fläche) und Winkel als „Größe" (Bogenlänge)

Zusätzlicher Begriff *Halbebene* ist notwendig.

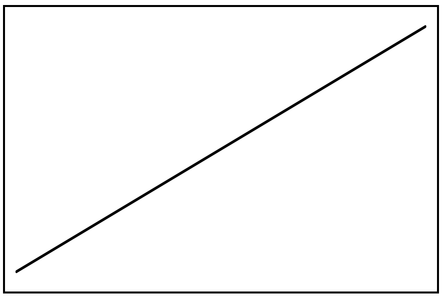
Was ist eine Halbebene?

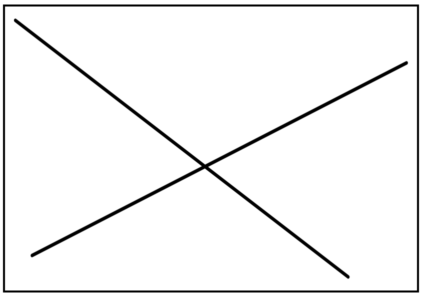
(E8) Zwei Punkte A, B liegen *auf derselben Seite* von g, wenn …



Diese Definition kann nun zur Herleitung des Winkelbegriffs verwendet werden:

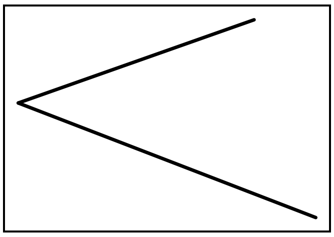
Def. 3.2: Eine ***offene Halbebene*** **(g; A ∉ g)** besteht aus allen Punkte, die mit A auf derselben Seite von g liegen. Zählt man g dazu, dann heißt die Halbebene ***abgeschlossen*.**

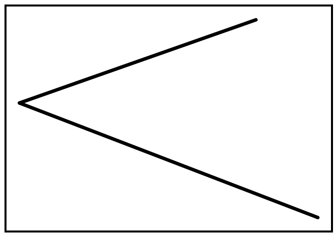




Jede Gerade zerlegt die Ebene in zwei offene Halbebenen und die Gerade selbst.
In der linken Skizze hat man zwei abgeschlossene Halbebenen:
Der Durchschnitt zweier abgeschlossenen Halbebenen heißt ***Winkelfeld***.

Der Rand eines Winkelfeldes (= zwei Halbgeraden) heißt ***Winkel***.
Ein Winkel besteht also aus zwei Halbgeraden (Schenkel), die von einem Punkt S (Scheitel) ausgehen.





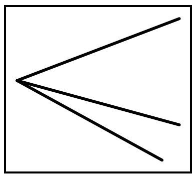
3.3 Winkelmessung

(E9) Jedem Winkel lässt sich eine nichtnegative reelle Zahl (Winkelmaß) eindeutig zuordnen mit folgenden Eigenschaften:

E9.1 $\sphericalangle ASA = 0$

E9.2 $\sphericalangle ASB = 180°$, wenn $S \in AB$ ("gestreckter Winkel")

E9.3 Maß eines Winkels ist die Summe der Maße der Teilwinkel



Durch die zweite Eigenschaft wird die Einheit der Winkelmessung festgelegt:

- **Schulgeometrie:** Gestreckter Winkel = 180° (**Grad** - genauer: Altgrad)
  1° = 60' = 3600 " (geht auf BABYLONIER zurück)

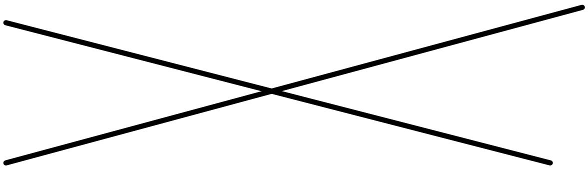
- **Technik, Vermessungswesen:** 200 Grad (**Gon** oder Neugrad)

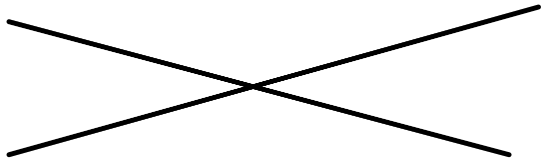
- **Naturwissenschaft, höhere Mathematik:** (**RAD**iant, Bogenmaß)
  abgeleitet aus Umfang des Einheitskreises:

$u = 2.r.\pi$ b =

Nebenwinkel, Scheitelwinkel

geg: 2 Gerade g, h



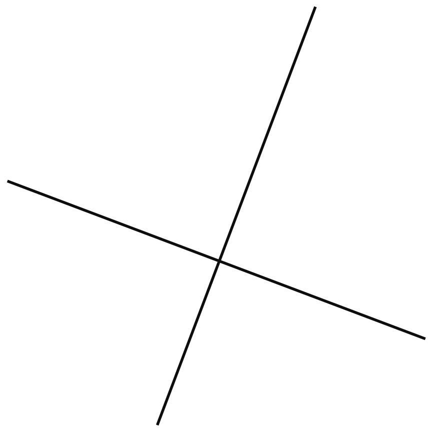


exakter: *Nebenwinkel*: Durchschnitt = Strahl, Vereinigung = Halbebene;
Scheitelwinkel haben gemeinsame Nebenwinkel

Summe der Maße zweier Nebenwinkel = 180° (sie sind supplementär)

Satz 3.1: Zwei Scheitelwinkel sind jeweils gleich groß.

Bw. vgl. Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 15

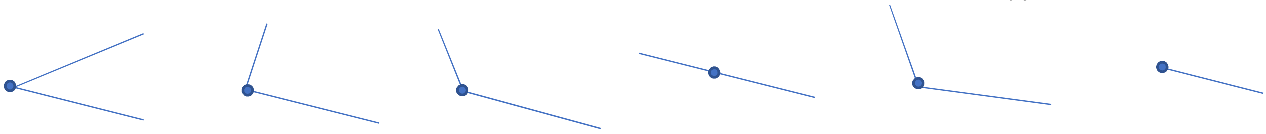


Def. 3.3: Ein **rechter Winkel** ist ein Winkel, dessen Maß mit dem seines Nebenwinkels übereinstimmt,
d.h.: Maß = 90° = 100 Gon = u / 2. π

Gerade, die einen rechten Winkel festlegen, heißen untereinander *normal*, *senkrecht* oder *orthogonal*. [a ⊥ b]

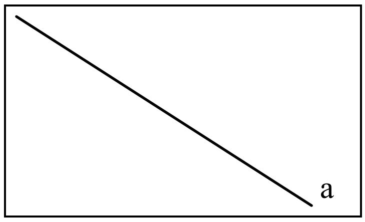
Folgende Unterscheidung ist bei Winkeln üblich:

spitzer W.	*rechter W.*	*stumpfer W.*	*gestreckter W.*	*erhabener W. (überstumpf)*	*voller Winkel*



3.4 Parallelität

Man zeichnet eine Gerade a,
dann b mit a ⊥ b,
dann c mit c ⊥ b.



Offenbar haben a und c keinen Punkt gemeinsam, dies führt zur folgenden Definition:

Def. 3.4: Zwei Geraden heißen **parallel**, wenn sie keinen Schnittpunkt haben.

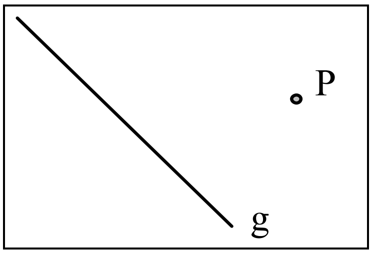
Problem: Diese Definition gilt im Raum nicht, warum?

Def. 3.5 (Alternativdefinition im R2): Zwei Geraden, die konstanten Abstand voneinander haben, heißen **parallel**.

Im Raum gilt:

Def. 3.6: Zwei Geraden heißen **parallel**, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden. [HILBERT §7, p 28]

Gegeben sei nun eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb von g, gesucht ist eine Parallele zu g durch P. Offenbar ist diese eindeutig bestimmt.

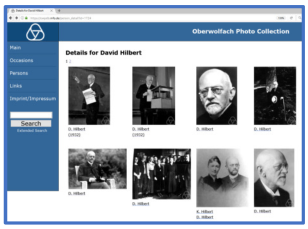


Interessanterweise lässt sich diese einfache Tatsache nicht aus den bisherigen Grundsätzen ableiten, deshalb sei es als Axiom notiert:

*E10 Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.

E10 ist das berühmte "**Parallelenaxiom**". Es steht hier in der Fassung von David HILBERT. Er nannte es „Euklidisches Axiom".
>>> www.mathematik.de/ger/diverses/aktuelles/david-hilbert.html

Hinweis: David HILBERT (1862 - 1943, Göttingen) wurde schon zu Lebzeiten als einer der größten Mathematiker anerkannt. Seine Untersuchungen auf fast allen Gebieten der Mathematik waren für deren weitere Entwicklung von tiefgehendem Einfluss. Sein berühmter Vortrag am Mathematikerkongress 1900 in Paris, in dem er 23 damals ungelöste mathematische Probleme vorstellte, befruchtete die Mathematik bis heute. Mit seinen "Grundlagen der Geometrie" führte Hilbert streng die axiomatische Methode in die Geometrie ein. → *Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 181ff*


Vgl. Photo Collection Oberwolfach https://owpdb.mfo.de/person_detail?id=1724

A.2.1. Axiome der Verknüpfung
A.2.2. Axiome der Anordnung
A.2.3. Axiome der Kongruenz
A.2.4. Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom)
A.2.5. Axiome der Stetigkeit

Wenn zwei Geraden a, b in einer Ebene eine dritte Gerade c derselben Ebene nicht schneiden, so treffen sie auch einander nicht. a und b sind dann **parallel** [HILBERT §7 p28]

Äquivalent dazu: Zu jeder Geraden g gibt es durch jeden Punkt P genau .... Parallele. Diese Formulierung geht auf den englischen Mathematiker und Geologen John PLAYFAIR (1748 – 1819) zurück.

Äquivalent dazu: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte (180°).
Dies nach Giovanni SACCHERI (1667 – 1733, heutiges Italien)

- ➔ https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelenaxiom

Warum ist der Parallelenbegriff für die Mathematikcommunity so interessant?

EUKLID (300 v. Chr., Alexandria) ist Autor des Werkes „**Die Elemente**" = 13 (15) Lehrbücher, in denen das damalige Wissen zur Mathematik zusammengefasst ist, vgl. etwa http://www.opera-platonis.de/euklid/ [20160212]
Zu Beginn gibt EUKLID 23 „***Definitionen***"

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie ist breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

…

8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien …

…

23. …

Dann folgen „***Postulate***", Grundtatsachen, die keines Beweises bedürfen (heute „*Axiome*").
Gefordert soll sein:

1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.
2. Dass man eine gegrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.
3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind. (*Euklidisches Parallelenaxiom*)

Eigenschaften eines Axiomensystems:

1. Vollständigkeit: Alle Sätze sollen aus den Axiomen hergeleitet werden können.
2. Widerspruchsfreiheit: Keine widersprechenden Aussagen sollen gefolgert werden können.
3. Unabhängigkeit: Kein Axiom soll aus den anderen gefolgert werden können.

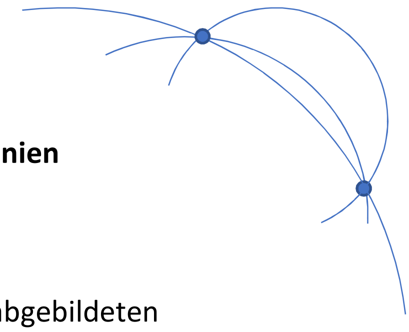
Besonders zur Vollständigkeit eines Axiomensystems vgl. die Aussagen des **GÖDELschen Unvollständigkeitssatzes** (z.B. →Internetsuche nach „Unvollständigkeitssatz" oder „Kurt Gödel")
Kurt GÖDEL (1906 – 1978, Mathematikstudium in Wien in den 1920er Jahren)

3.5 Strecken: kurz oder gerade?

Definiert man eine Strecke nicht als *gerade* Verbindung, sondern als *kürzeste* Verbindung zwischen zwei Punkten, so können Ideen der ebenen Geometrie auf gekrümmte Flächen übertragen werden, z.B. auf eine Kugeloberfläche („**Sphäre**“)

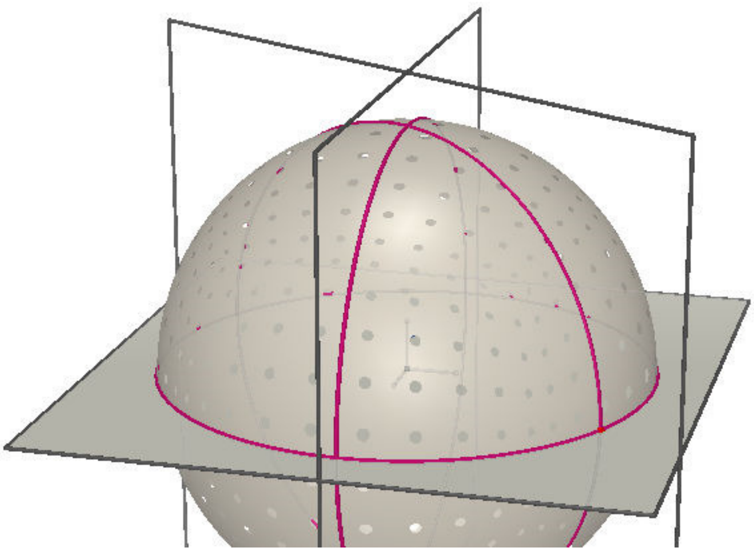
Satz 3.2: Auf einer Kugeloberfläche ist ein Großkreis die **kürzeste Verbindung** zwischen zwei Punkten.

Beweisidee: Je größer der Radius, desto kürzer ist die Verbindung (vgl. Skizze) zwischen den beiden Punkten. Kreise mit dem größten Radius auf einer Kugel sind die *Großkreise*. Sie haben den Kugelradius als Radius.



Großkreise sind für die Sphäre sogenannte **geodätische Linien** (= kürzeste Verbindungen, auch **Orthodrome** genannt).
„Geometrie = Erdmessung“

Aufgabe 3.1. Begründen Sie, dass die Winkelsumme des abgebildeten „Kugeldreiecks“ gebildet aus zwei Meridianen und dem Äquator größer als 180° ist. Überlegen Sie, dass es z.B. keinen zum Äquator parallelen Großkreis geben kann.



>>> Internetsuche nach „Kugeldreieck“

Man erhält auf diese Weise Geometrien, die das 5. Postulat von EUKLID nicht erfüllen, sogenannte ***nichteuklidische Geometrien***.

>>> etwa http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete/nichteuklidische-und-mehrdimensionale-geometrie.html [20170912]

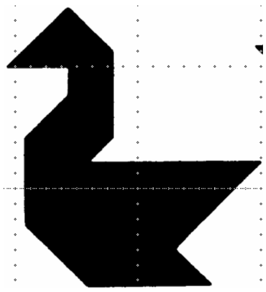
Umsetzung im Unterricht:
Winkel in Dreiecken auf Kugeln (z.B. Luftballons) oder Zylindern oder hyperbolisch geformten Vasen vermessen lassen.

3.6 Flächenmessung

Vgl. Fachmathematik-Fulmek-Skriptum, p 57

>>>https://rechneronline.de/pi/

Def. 3.7: Eine **Figur** ist eine zusammenhängende Punktmenge (mit Fläche).

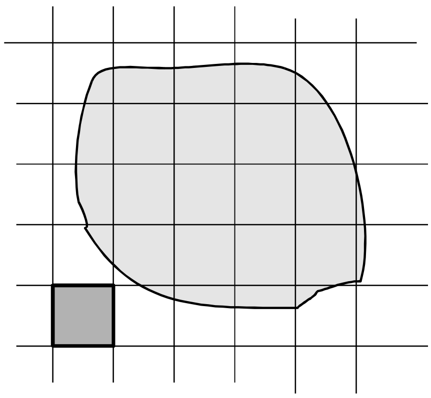


→ 28

Punktmenge → Zahl

Messen ist Vergleichen, womit vergleicht man?

Maßzahl, Flächenhalt

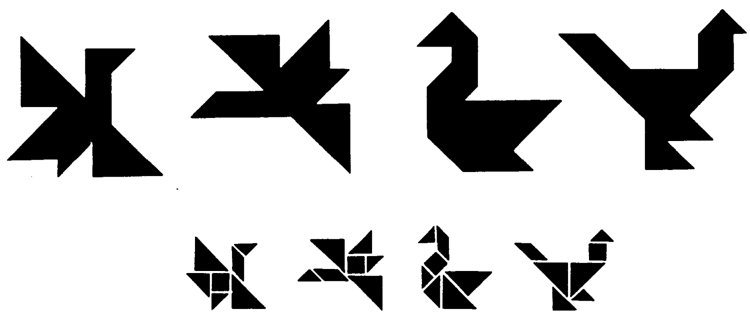


Axiome der Flächenmessung:

FL1: Kongruente Figuren haben denselben Flächeninhalt.

FL2: Können zwei Figuren paarweise in gleiche Teilfiguren zerlegt werden, so haben sie denselben Flächeninhalt. Solche Figuren heißen **zerlegungsgleich**.

Sind diese **Tangram**-Figuren flächengleich?

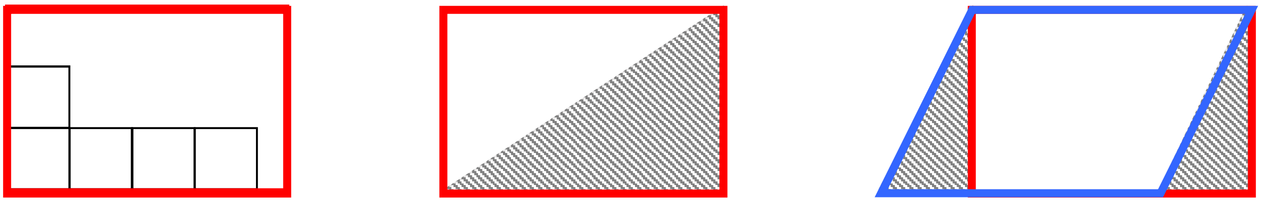


JA, weil …

>>> https://de.wikipedia.org/wiki/Tangram

Aufgabe 3.1: Begründen Sie die Flächengleichheit des Parallelgramms mit dem regelmäßigen Sechseck. Warum Sie die L-Figuren mit dem Rechteck flächengleich?

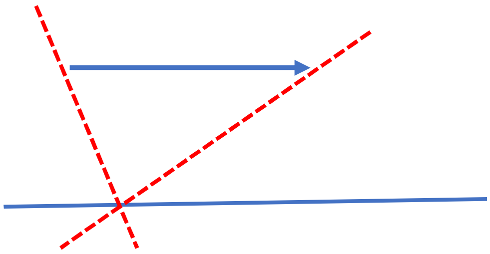
Meist statt Abzählen → Berechnen oder näherungsweises Berechnen

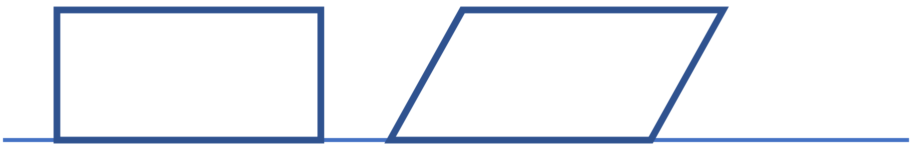


Vgl. Übungen: Leiten Sie die Flächenformeln für Parallelogramm, Trapez, Deltoid her (jeweils mindestens zwei verschiedene Methoden)

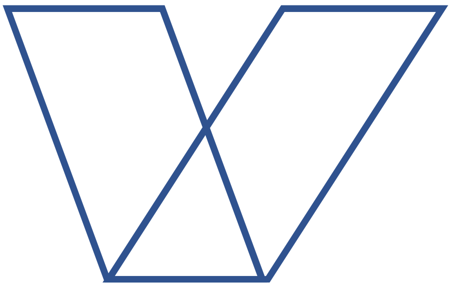
Scherung

Def. 3.8: Eine Abbildung heißt **Scherung**, wenn jedem Punkt P ein Bildpunkt P' wie folgt zugeordnet wird:
Punkte auf einer gegebenen Geraden a bleiben fix „Fixpunktgerade", „Scherungsachse".
Für alle anderen Punkte gilt: PP' ist parallel zu a.
Das Bild einer Geraden ist eine Gerade.
Die Abbildung ist parallelentreu.



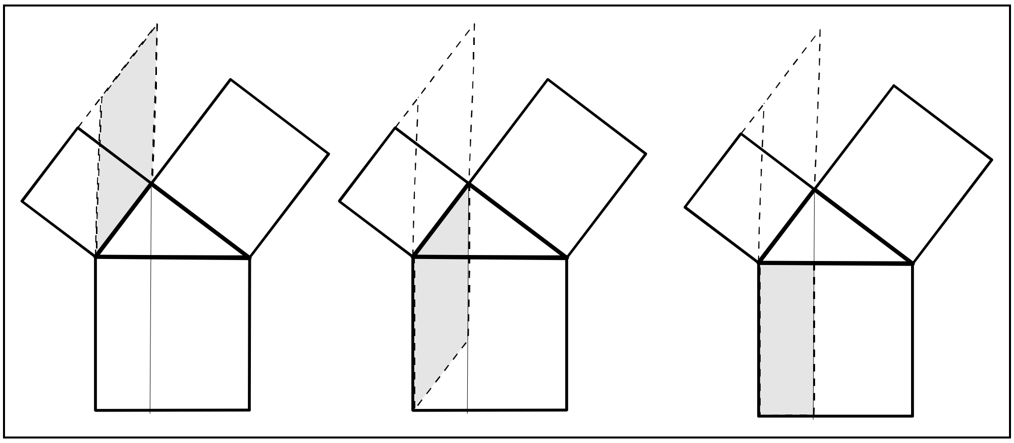


Aufgabe 3.2: Beweisen Sie ohne Verwendung der Flächenformel, dass die beiden Parallelgramme denselben Flächeninhalt haben.

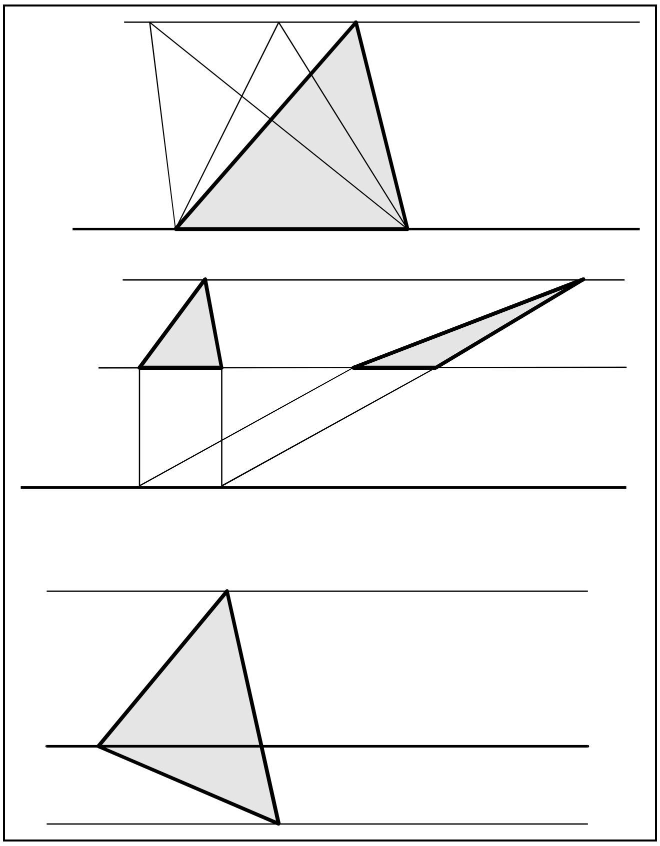


Anwendung des Scherungsbegriffes z.B. bei einem Beweis des Satzes von PYTHAGORAS

Aufgabe 3.3: Begründen Sie die Richtigkeit der grafisch vorliegenden Beweisidee



Warum ist die Scherung flächentreu?



1. Schritt:
Dreiecke, von denen eine Seite in der Scherungsachse liegt, bleiben nach der Abbildung flächengleich.

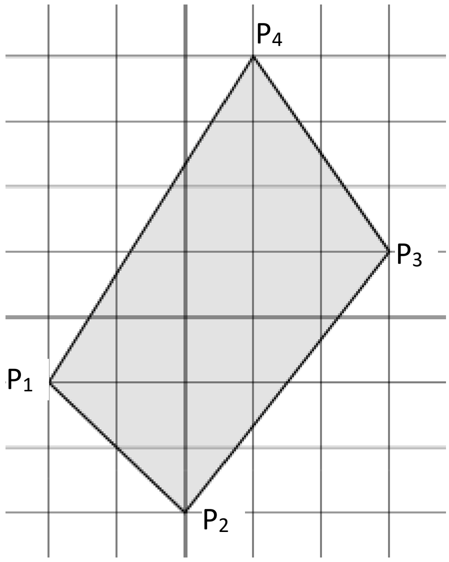
2. Schritt:
Dreiecke mit einer Seite parallel zur Scherungsachse bleiben ebenso flächengleich.

3. Schritt:
Dreiecke mit Seiten allgemeiner Lage zur Scherungsachse bleiben flächengleich.

4. Schritt:
Allgemeine Vielecke und andere Figuren bleiben flächengleich.

Flächen berechnen „**Geometrie = Erdmessung**“

Aufgabe 3.4: Berechnen Sie den Flächeninhalt des dargestellten Vielecks auf verschiedene Arten



Schätzen durch Abzählen der Einheitsquadrate

Teilung in Teildreiecke (Führen Sie dies auf mindestens 2 Arten durch, dann ev. Mittelwert, um Messfehler auszugleichen)

Welche Möglichkeiten finden Sie noch zur Berechnung?

Zwei Methoden, die in der Regel nicht im Schulalltag verwendet werden, seien ohne Beweis angeführt und sollen exemplarisch zur Flächenberechnung verwendet werden:

Formel von PICK (Georg PICK, Prag, 1942 im KZ gestorben)

$$A = i + \frac{r}{2} - 1$$

Gilt nur für Figuren, deren Eckpunkt (ganzzahlige) Gitterpunkte sind.
Man zählt die Gitterpunkte und schließt dann mit der Formal auf den Flächeninhalt:

i… Anzahl der Punkte im Inneren

r… Anzahl der Punkte am Rande der Fläche

Hinweis: *Wichtige Folgerung für einen Lehrer / eine Lehrerin: Lässt man nur ganzzahlige Angabekoordinaten zu, dann ist der Flächeninhalt auch ganzzahlig oder hat höchstens die Zehnteldezimalstelle 5.*
Lässt sich das auch mit dem Schülerwissen ohne diese Formel begründen?

———————————

Formel von GAUSS

(Carl Friedrich GAUSS, 1777 - 1855, „*Princeps mathematicorum*“)

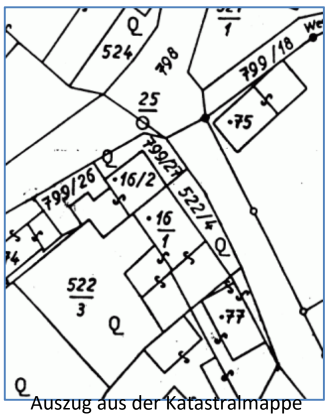
Diese Formel wird im Vermessungswesen praktisch verwendet: Aus den Koordinaten von Punkten auf der Grundgrenze kann der Flächeninhalt eines Grundstückes berechnet werden.

Bestimmen Sie zunächst die Koordinaten der vier Eckpunkte und setzen Sie dann in die angegebene Summenformel ein.

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i.(y_{i-1} - y_{i+1})\right|$$

Hinweis: Setzen Sie hier für $y_0 = y_4$ und für $y_5 = y_1$

$P(x_i/y_i)$ seien die Koordinaten der Eckpunkte (i = 1, 2, 3, 4)



Auszug aus der Katastralmappe

Beweise vgl. etwa: WITTMANN, E.CH. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken, Braunschweig & Wiesbaden: Vieweg, p 435

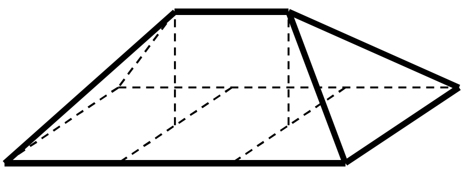
oder

unter „*Herleitung der Gaußschen Flächenformel von A bis Z*“ auf
http://www.matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=93864&ref=https%3A%2F%2Fwww.google.at%2F

oder

Internetsuche nach „Gausssche Flächenformel Beweis“

3.7 Volumsmessung

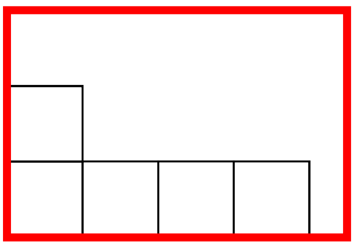


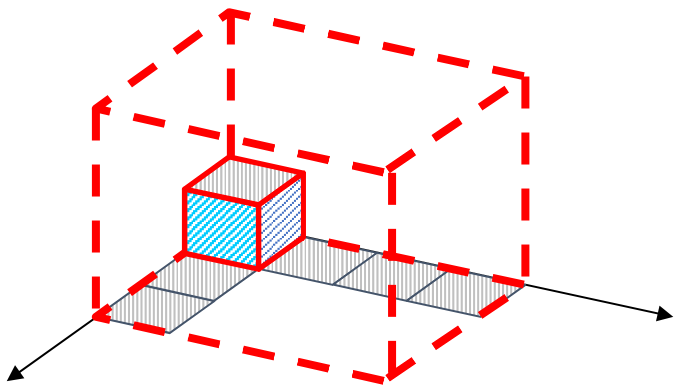
→ $39\ m^3$

Volumen → Zahl

Punktmenge

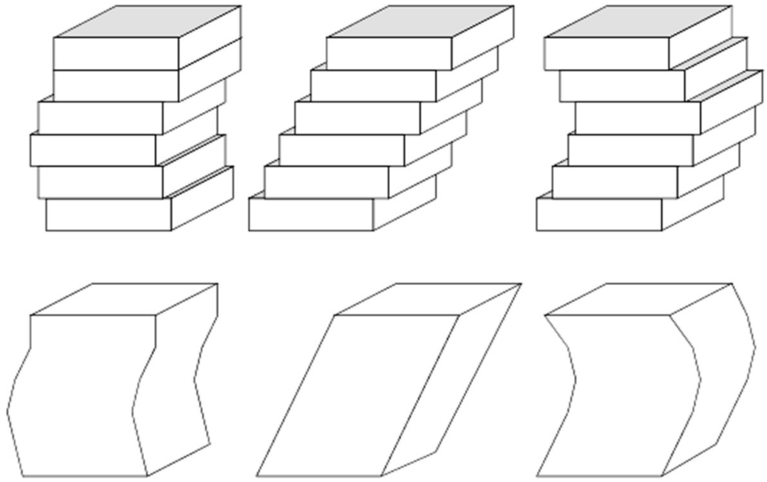
Maßzahl, Flächenhalt





Prinzip von Cavalieri [Bonaventura CAVALIERI, Bologna, 17. Jhdt., Schüler v. Galileo GALILEI]

Satz 3.3: Stehen zwei Körper auf derselben Ebene und werden sie von jeder Parallelebene in flächengleiche Figuren geschnitten, dann haben die Körper dasselbe Volumen.

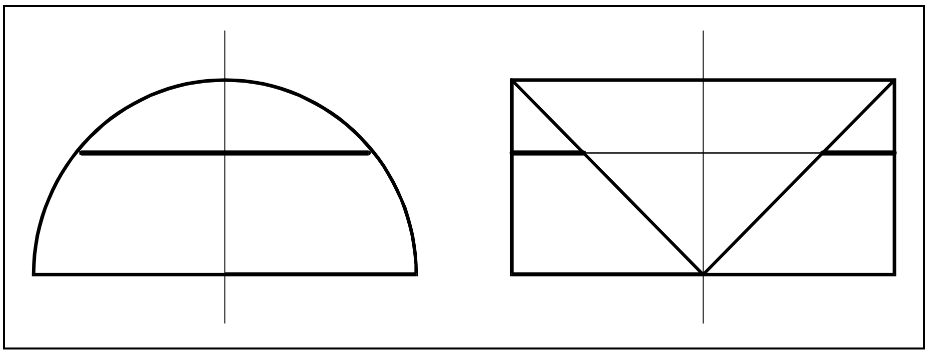


Aufgabe 3.5: Volumen eines schiefen Prismas

Ein schiefes Prisma entsteht aus einem Quadrat mit der Seitenkante 5 cm, indem sein Mittelpunkt längs einer unter 60° gegen die Basis ansteigenden Geraden so lange wandert, bis er über einen Basiseckpunkt zu liegen kommt („**Extrusion**"). Das Volumen des solcherart durch Verschiebung eines Quadrats entstandenen Prismas ist zu berechnen. (153)

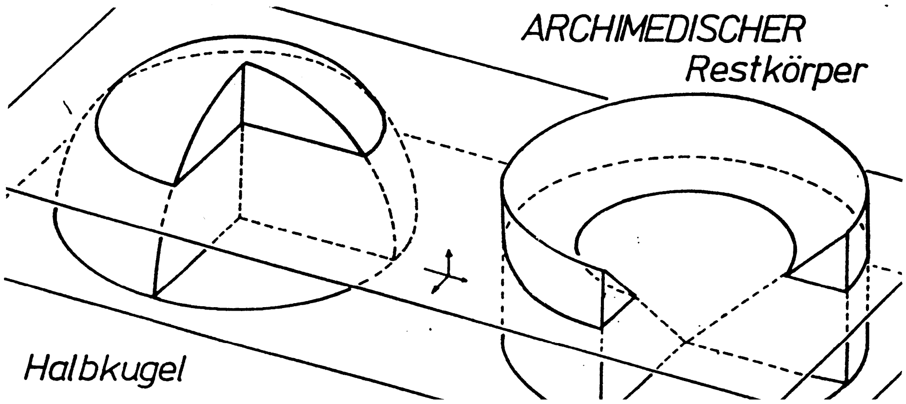
Aufgabe 3.6: Herleitung des Kugelvolumens

Zeigen Sie, dass das Volumen einer Halbkugel (Radius r) mit dem Volumen des Zylinders verringert um einem auf der Spitze stehenden Kegel mit Höhe r) übereinstimmt.



Bemerkung 1: Die Lösung beruht auf Anwendung des Prinzips von CAVALIERI.

Bemerkung 2: Die Herleitung nach Aufgabe 3.6soll auf einer Idee von Galileo GALILEI (1564 - 1642) beruhen.



Bemerkung 3: Bereits ARCHIMEDES (+212 v. Chr, Syrakus) leitete die Formel für das Volumen einer Kugel durch Vergleich mit dem Volumen eines Kegels und eines Zylinders her. Er verwendete bei seiner Überlegung einen Vergleich der Kugelmasse mit der eines Kegels und eines Zylinders sowie das Hebelgesetz (siehe etwa [WITTMANN: Elementargeometrie und Wirklichkeit, Seite 240]). ARCHIMEDES konnte das Volumen der Kugel auch mit einer anderen Methode bestimmen - mit der sogenannten **EXHAUSTIONSMETHODE** (siehe Abschnitt 8).

4. Anfänge des Skizzierens und Konstruierens im Sek-I-Unterricht

Konstruieren ist Kommunizieren

Fachmathematik-Fulmek-Skriptum: „Einfache geometrische Konstruktionen“ (p 48ff) |„Bemerkenswerte Punkte im Dreieck“ (p 70ff)

Internetsuchtipps: Geometrische Konstruktionen

Lehrplan 1. Klasse Sek I: Zeichengeräte zum Konstruieren von Rechtecken, Kreisen und Schrägrissen gebrauchen, einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen

Lehrplan 2. Klasse Sek I: Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke untersuchen, wesentliche Eigenschaften feststellen, die Figuren skizzieren und konstruieren können, Erkennen, ob Angaben mehrdeutig sind oder überhaupt nicht in Konstruktionen umgesetzt werden können, Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen, - und für Konstruktion anwenden können

Lehrplan 3. Klasse Sek I: Vergrößern und Verkleinern von Figuren

Lehrplan Geom. Zeichnen: Richtige Handhabung und Wartung fachspezifischer Werkzeuge, … Freihandskizze als unverzichtbares Hilfsmittel bei der Entwurfsarbeit, … beim Einsatz von CAD-Systemen ist auf die Verfügbarkeit geeigneter Arbeitsmittel zur Einzel- oder Partnerarbeit hinzuwirken. … auf die sachgerechte und intelligente Nutzung ist zu achten. Konstruktion auf dem Zeichenblatt durch Modelle und andere Hilfsmittel, die der Entwicklung der Raumanschauung dienen bzw. die geometrischen Hintergründe deutlich machen, begleiten

Schulanwendung nicht nur im Mathematikunterricht, Skizzen und Darstellungen räumlicher Objekte werden in fast allen Fachgegenständen benötigt.

Um die Bedeutung des Zeichnens hervorzuheben, einige Zitate:

Grundlegung in der Primarstufe …

„Am Ende des vierten Schuljahres sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, Schablonen, Lineal, Zirkel und Geodreieck funktionsgerecht zu gebrauchen.

Diese Freude am Zeichnen, der spielerische und kreative Aspekt, durchdringt vielmehr alle zeichnerischen Aktivitäten im Geometrieunterricht der Grundschule. In einem solchen Geometrieunterricht wird genaues Zeichnen nicht deshalb notwendig, weil der Lehrer es fordert, sondern weil die Zeichnungen umso schöner werden, je sauberer und exakter gezeichnet wird.“

W. Schipper, 2009

aus Schipper, W.: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen, Schroedel, Braunschweig 2009, p 273

Zum Geometrieverständnis durch Zeichnen …

„Vielleicht das vorzüglichste Mittel, dass Kinder leicht und sicher zu einem Verständnis der geometrischen Formen und ihrer Gesetzmäßigkeiten kommen, ist, dass sie sehr viel selbst zeichnen."

W. Breidenbach, 1964

zitiert nach Radatz H., Rickmeyer K.: Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen, Schroedel. Hannover 1991, p 153

Bilder alleine sind zu wenig …

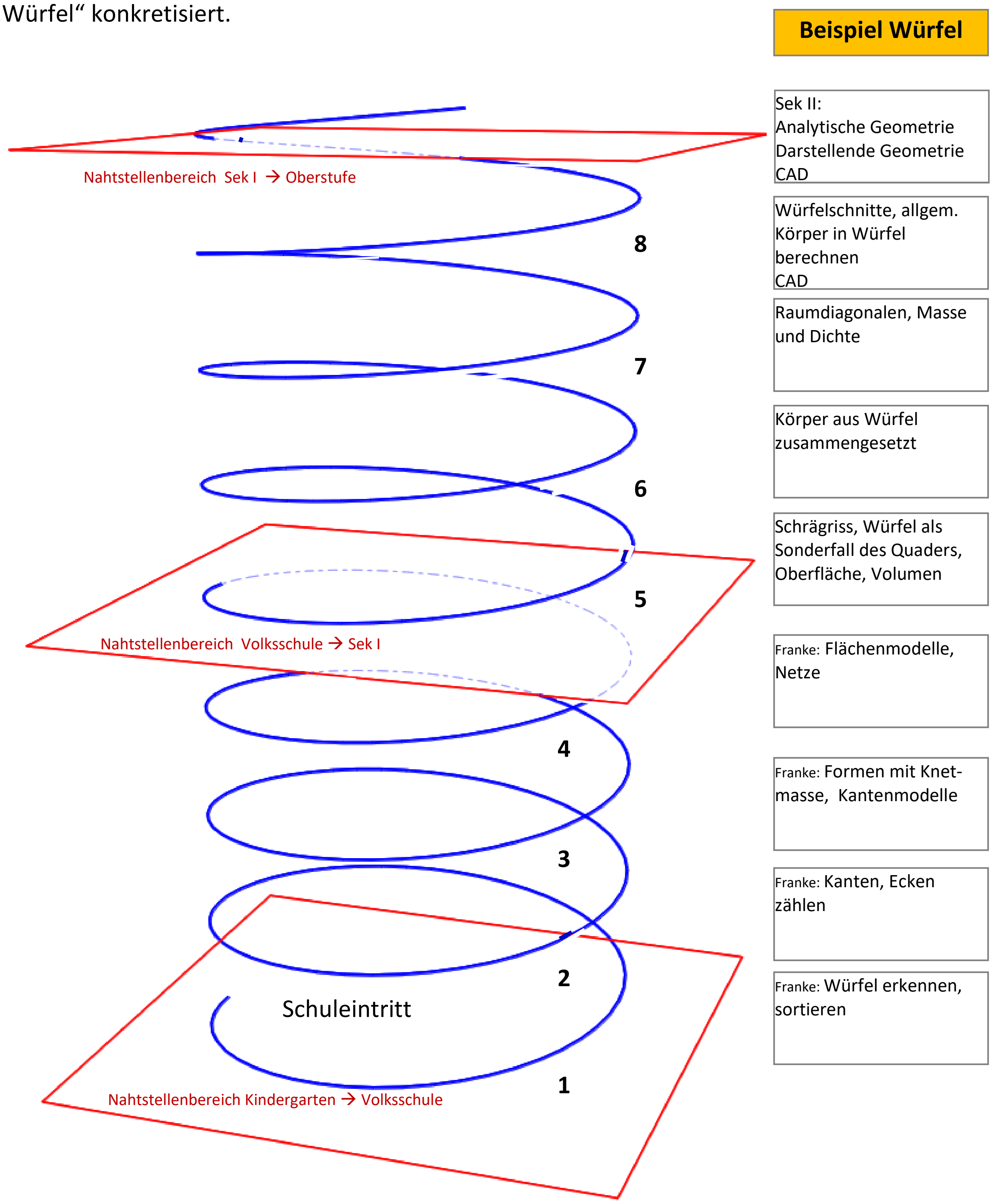
„Aber das Bild allein macht noch nicht die Geometrie aus, sondern erst die Verknüpfung des Bildes mit logischen Schlussweisen, so dass das Bild letztlich nur als Inspiration fungiert sowie als Kontrolle für unsere Überlegungen.“

H. Stachel, 2014

www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2014 Band 47/VortragStachel.pdf

4.1 Das Spiralprinzip nach BRUNER

Konstruktive Aspekte begleiten den gesamten Geometrieunterricht, rechts am Themenkreis „Würfel“ konkretisiert.

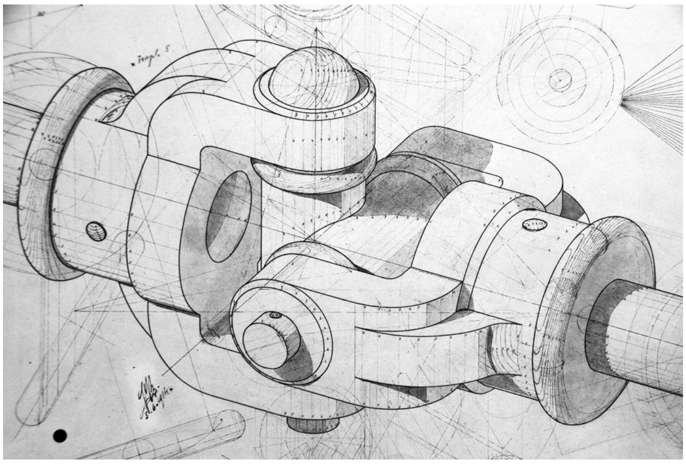


Mit dem Spiralprinzip vertrat Jerome Seymour BRUNER (*1915) die These: Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lerngegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form nahegebracht werden.

Intuitive Vermittlung → altersgemäß wiederholen

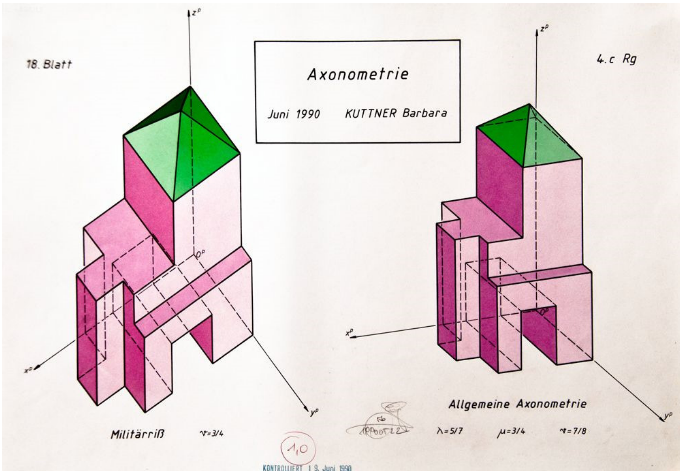
Beispiele

Historisch, 1914, Technische Hochschule Wien



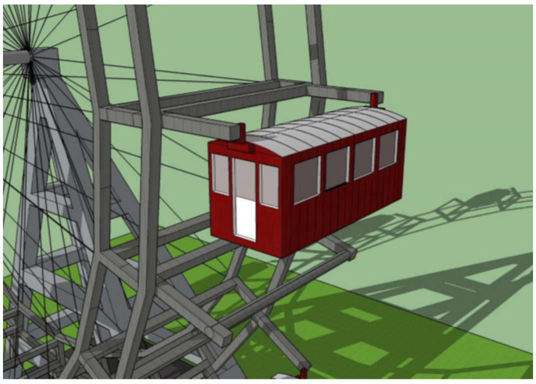
http://www.geometry.at/materialien/nostalgieausstellung/

Historisch, 1990, 4. Klasse BRG Wieselburg (Georg Schilling)

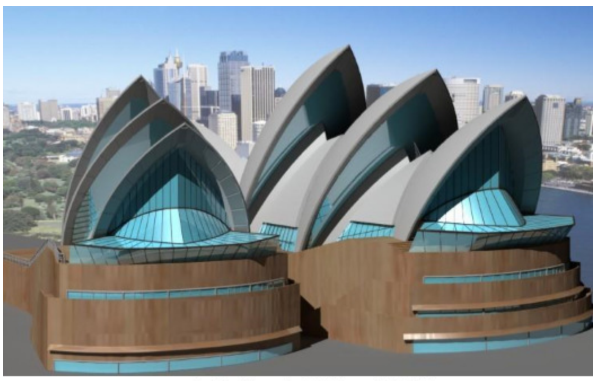


http://www.geometry.at/materialien/nostalgieausstellung/

Raumgeometrie und CAD, 2017, Sek I, Thema „Im Freizeitpark“ u. 2015, Sek II „In der Stadt“



noe_1_Petrovic_Aleksander_pic2



1_Mairboeck_Melissa_Bild (2)

http://modellierwettbewerb.schule.at/

Hinweis: Das Thema für den Geometriemodellierwettbewerb 2018 ist „In der Zukunft“

Aus den Unterrichtszielen des Mathematiklehrplans

Geometrie:

- …mit **grundlegenden geometrischen Objekten** und mit Beziehungen zwischen diesen Objekten vertraut werden,
- **zeichnerische Darstellungen** von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können,
- geeignete Sachverhalte **geometrisch darstellen** und umgekehrt solche Darstellungen deuten können.

Begriffsklärung

Skizze (griech. „aus freier Hand“): Festhalten/Wiedergeben einer Idee, Verdeutlichung einer Form oder Anordnung, Unterstützung von Erklärungen, etwas „Vorläufiges“, aber unverzichtbares Hilfsmittel bei der Entwurfsarbeit

Freihandzeichnung: Fertige Darstellungen, die auch mit Zirkel und Lineal bzw. CAD hergestellt werden (können) / worden sind

„Exakte“ Zeichnung: Herstellung mit Hilfe von Werkzeugen, wie Lineal, Zirkel, Geodreieck, DGS, CAD

Die Grenzen sind fließend, die Unterscheidung ist nicht entscheidend, es geht um Kommunikation und Wiedergabe von Beziehungen zwischen Objekten.

Konstruieren

Lat.: con, struere →„zusammen“, „bauen, schichten“

… aus einzelnen Elementen wird *G*emeinsames, Zusammenhängendes, etwas Neues

Kommunizieren

Lat.: communis→ „gemeinsam“

… zu etwas „Gemeinsamen“ machen, zum gemeinsamen Wissen zum Beispiel

Papier oder Computerbildschirm?

4.2 Aus der Schulpraxis

Zeichenwerkzeug

Was ist in der Schulpraxis ideal?

- Bleistift – Feinminen-/Fallminenstift
- Tablettstift
- Radierer
- Spitzer
- Holzlineal (Länge 20 oder 30 cm)
- Geodreieck (Hypotenuse ca. 20 cm)
- Zirkel
- Computer, Tablett, Handy

Vgl. klassische Zeichengeräte unter
http://www.geometry.at/materialien/nostalgieausstellung/Zeichengeraete/index.htm

Radieren
„Abradieren“ der Schmutzschicht, ev. Teil abdecken vor dem Radieren

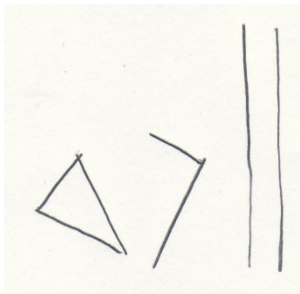
Spitzen
Zirkelmine → Schärfen mit Schleifpapier
Bleistift Spitzer „reisst“ manchmal die Mine auf, Spitze glätten auf Schmierpapier

Zeichentechnik
Druck auf Bleistift variieren – verschieden kräftige Linien

Gerade Linien: Bleistift eng an der Linealkante führen (Bleistiftneigung!)
Zirkel – Kreise zeichnen (halten am Schaft und anfangs nahe der Spitze, nicht bei Mine)

Geodreieck – rechte Winkel mit Hypotenuse und eingezeichneter Normale zeichnen

Mögliche Exaktheitsansprüche

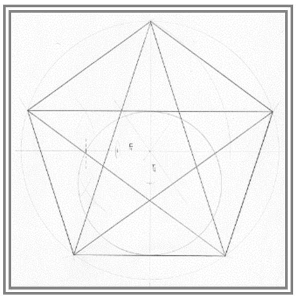


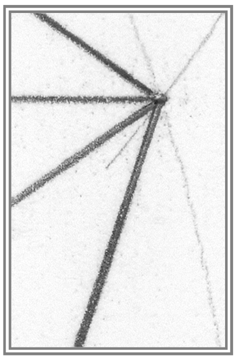
Strichstärke (Grauwert), Strichbreite, Exaktheit

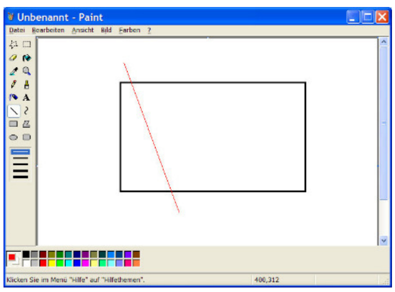
Einhaltung des Maßstabs, um Ergebnisse ablesen zu können

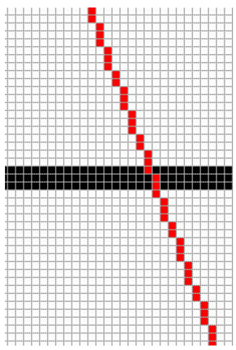
Einhaltung der Abbildungsgesetze bei Darstellung räumlicher Objekte und Sachverhalte durch Parallelrisse

- Parallelentreue, Teilverhältnistreue





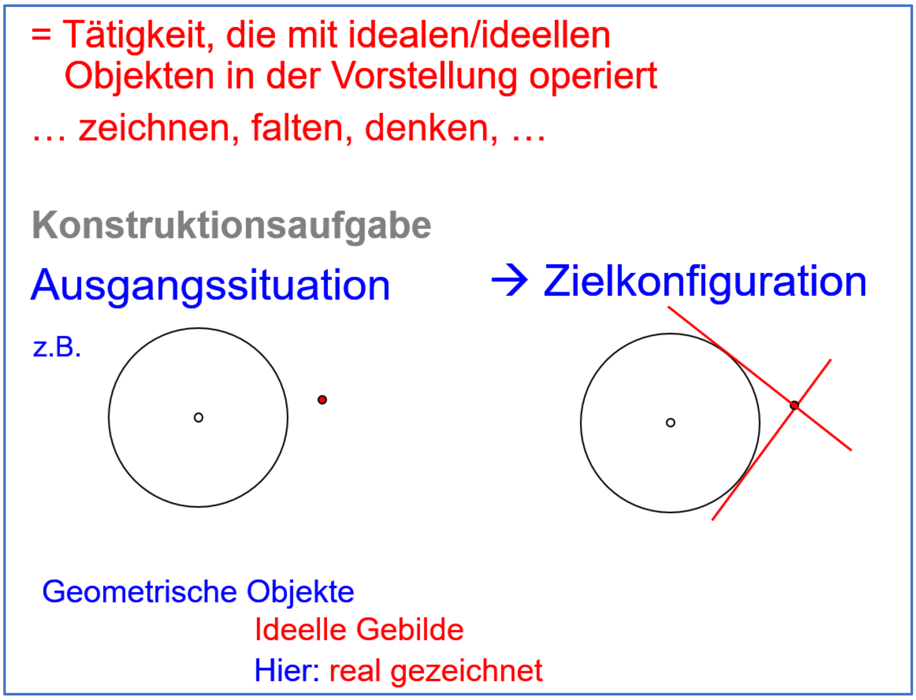




Es geht nicht nur um Darstellungsfähigkeit, es geht um die Geometrie:
Die geometrischen Inhalte sind das Entscheidende!

Konstruieren: Ziel und didaktische Bedeutung

[nach Weigand, H.-G. ua: Didaktik der Geometrie für die Sek I, p56 – 79]



Es geht nicht um das tatsächliche Herstellen realer Objekte, sondern um das gedankliche Erzeugen ideeller Objekte (Punkte, Strecken, …) mit Hilfe idealisierter Operationen (Punkte mit Lineal verbinden, Kreise zeichnen, …).

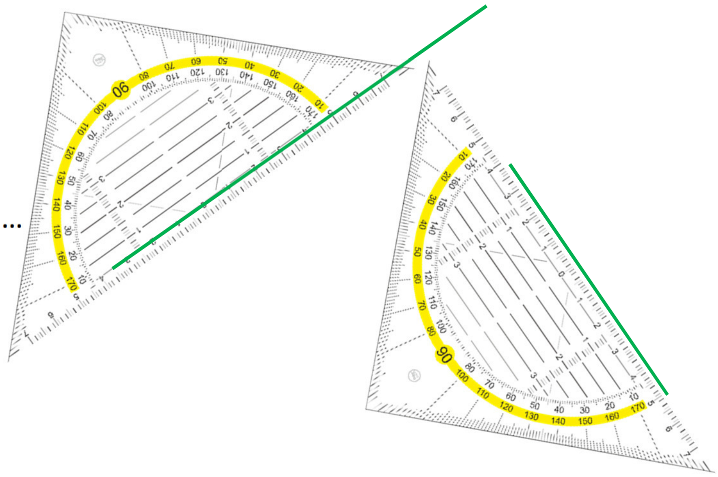
Bedeutung des Konstruierens

- Konstruieren als Problemlösen

  Verstehen der Aufgabe, Entwicklung eines Lösungsplanes, Fallunterscheidungen, Durchführen der Konstruktion, Konstruktionsbeschreibung, Begründung der Richtigkeit, Überlegungen zur Eindeutigkeit
- Entwicklung von Argumentationsfähigkeiten
- Einführung neuer Begriffe, Handlungsvorschriften begrifflich fassen
- Entwickeln kreativer Fähigkeiten, eigenständiges Entdecken
- Entwickeln praktischer Fähigkeiten, Feinmotorik
- Vermittlung von Kenntnissen

Schul-Werkzeugkasten

Lineal Zirkel Geodreieck DGS CAD



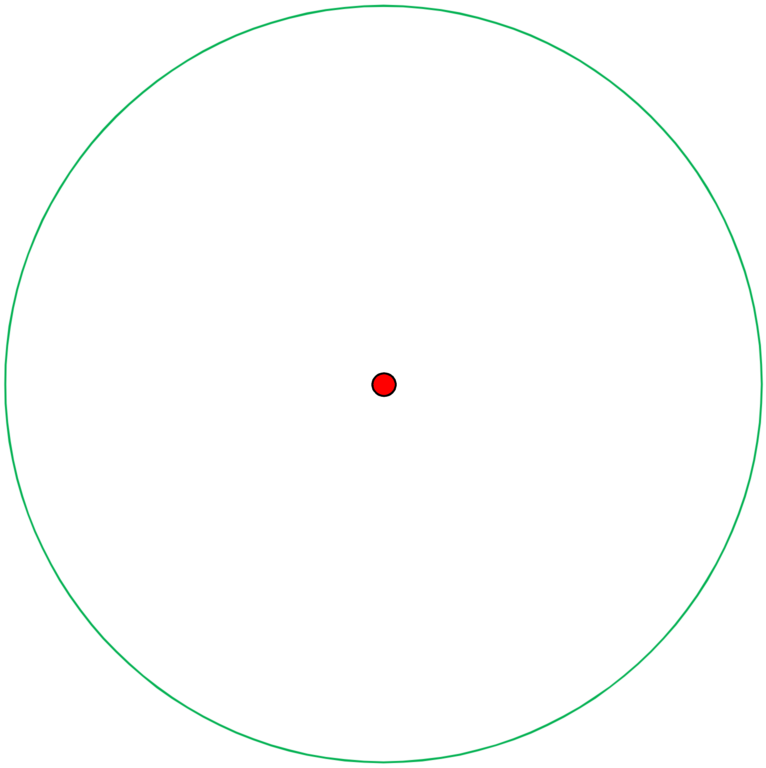
Grundkonstruktionen (GK) …

Zusammengesetze Konstruktionen (ZK) …

Makro …

Vergleiche ev auch die Konstruktionsapp: www.euclidea.xyz

Aufgabe 4.1: Konstruktion eines **regelmäßigen Fünfecks** aus Mittelpunkt und Umkreisradius.
(Beweis der Konstruktion: Übungen, Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS)



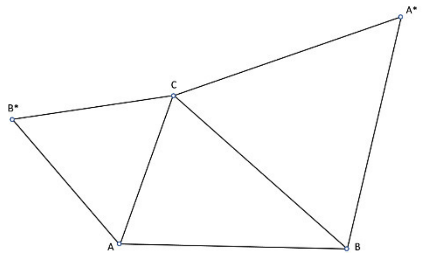
Hinweise: Diese Konstruktion beschreibt ALBRECHT DÜRER [1471 - 1528] in seinem Lehrbuch „Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit...“ (1525)
[Neudruck 1983 Verlag Dr. Alfons Uhl, Nördlingen, D, ISBN 3 921503 65 5]
>>> Internetsuche nach „Dürer Unterweisung“

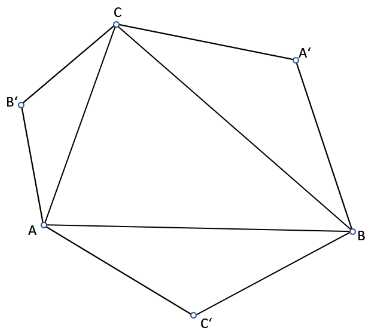
Zu den klassischen Schulkonstruktionen zählt die Ermittlung der sogenannten ***merkwürdigen Punkte*** des Dreiecks. Sie finden sich im Fachmathematik-Fulmek-Skriptum (p 69ff) und in der Schulbüchern der 2. Klasse Sek I ausführlich dokumentiert und beschrieben. Im Fachmathematik-Fulmek-Skriptum finden sich zusätzlich auch die Hinweise auf den **FEUERBACH-Kreis** (p 72f) und den **Satz von MORLEY** (p 74f).
Clark KIMBERLING (*1942) beschreibt in seiner ***Encyclopedia of Triangle Centers*** *(vgl. >>>* http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html) inzwischen über 12800 durchnummerierte merkwürdige Dreieckspunkte (Xi).

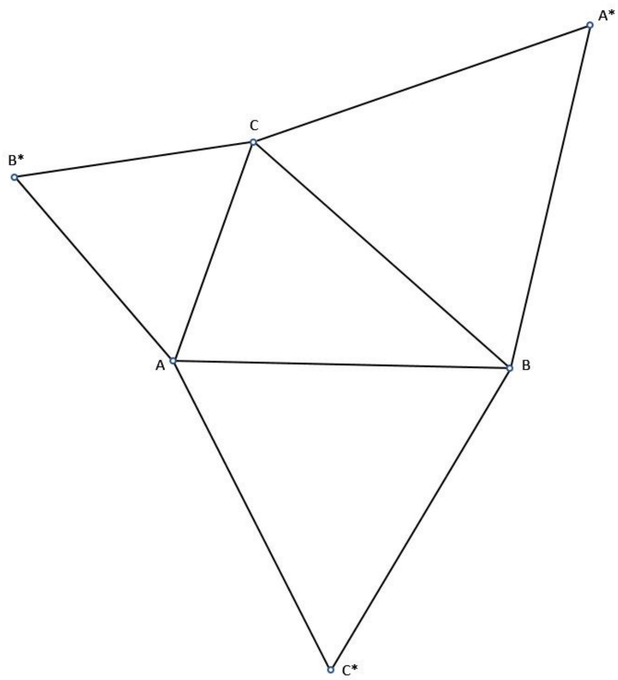
Dabei bedeutet: *X1 = Inkreismittelpunkt*
X2 = Schwerpunkt
X3 = Umkreismittelpunkt
X4 = Höhenschnittpunkt

Weiter geht es mit *X5 = Mittelpunkt Feuerbachkreis (Höhenfußpunkte, Seitenmitten)*
X6 = Lemoine-Punkt
…
X13 = Punkt von FERMAT …

Aufgabe 4.2: Über allen drei Seiten eines beliebigen Dreiecks werden gleichseitige Dreiecke errichtet. Die jeweils von einem Eckpunkt zum freien Eckpunkt des über der Gegenseite errichteten gleichseitigen Dreiecks verlaufenden Strecken schneiden einander in einem Punkt und sind gleich lang. Dies ist konstruktiv nachzuprüfen. (Beweis?)







Bemerkung 1: Verbindet man die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke mit den Gegenecken, so erhält, an den Punkt von NAPOLEON, die drei Mittelpunkte bilden übrigens wieder ein gleichseitiges Dreieck.

Bemerkung 2: Verallgemeinerung nach KIEPERT: zueinander ähnliche gleichschenkelige Dreiecke aufsetzen >>> KIEPERT-Dreieck mit Schnittpunkt, alle diese KIEPERT-Punkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, der KIEPERT-Hyperbel, die auch durch den Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, die FERMAT-Punkte und NAPOLEON-Punkte geht. (→ „Forschungsaufgabe“ für den Unterricht)

4.3 Klassische konstruktiv unlösbare Probleme - Grundkonstruktionen

Unter **Grundkonstruktionen** seien hier die **Konstruktionen mit Zirkel und Lineal** verstanden. Diese "sportliche" Beschränkung soll auf **PLATON** (um 400 v.Chr.) zurückgehen. Dahinter steckt der Wunsch, nur die beiden genauesten Zeichengeräte zu benützen.
Die drei **klassischen Probleme der Mathematik** der Griechen, die mit Zirkel und Lineal unlösbar sind:

Winkeldreiteilung (Trisektion)

Ein beliebiger Winkel φ soll konstruktiv in drei gleiche Teile geteilt werden.

Dies führt zur Gleichung $4x^3 - 3x - 3\cos\varphi = 0$

Vgl. Lexika der Math., „Dreiteilung eines Winkels" bzw. >> Internetsuche nach „Trisektion Winkel"

Manche Winkel lassen sich exakt mit Zirkel und Lineal dreiteilen: Teilen Sie 90°-Winkel mit Zirkel und Lineal in 3 gleich große Teile.

Würfelverdoppelung (DELISCHES PROBLEM)

Zur Befreiung der Insel DELOS sollten die Bewohner nach einem Orakelspruch den Altar**würfel** ihres Apollontempels verdoppeln:

Konstruiere zu einem Würfel mit gegebener Seitenlänge die Kantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen.

Rechnerischer Ansatz:

Würfel 1: $V = 1\ e^3$, Kantenlänge = 1
Würfel 2 mit doppeltem Volumen: $V = 2\ e^3$, wie groß ist seine Kantenlänge?
Hierzu müsste die Gleichung $x^3 = 2$ gelöst werden, eine Gleichung 3. Grades, dies ist mit Zirkel und Lineal alleine nicht möglich, vgl. hierzu die Hinweise am Blatt „Konstruktionsmittel".

Quadratur des Kreises

Die Seitenlänge eines Quadrats ist zu konstruieren, welches zu einem Kreis flächengleich ist.

Der Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises wurde erst 1882 durch Ferdinand von **LINDEMANN** (1852 - 1939) geschafft. Es geht um die Konstruierbarkeit von $\sqrt{\pi}$.


SPORT
KURIER | MONTAG, 31. JÄNNER 2011
Sturzserie
Die Quadratur des Kreises
Auch Streitberger fällt für die WM aus. Die Diskussion um die Sicherheit erhält nach vielen Stürzen neue Nahrung.

Die Quadratur des Kreises, leicht gemacht

Beruf und Familie. Manche Unternehmen halten sich schon für familienfreundlich, wenn sie Gleitzeit zulassen. Andere lassen sich mehr einfallen. Ein Best-of nützlicher Ideen für Firmen, die Eltern das Leben leichter machen wollen.

VON ANDREA LEHKY

Was hilft Mitarbeitern, Beruf und Familie besser unter einen Hut zu bringen? Der häufigste (und leider meist unrealistische) Wunsch ist ein Betriebskindergarten. Es gibt aber auch leist- und umsetzbare Ideen, die schon vorgelebt werden.

▶ **Schenk mir Zeit.** Zeitsouveränität heißt, sich den Tag selbst einteilen zu können. Das muss nicht so kompliziert werden wie bei der Allianz Versicherung, die 70 verschiedene Teilzeitvarianten anbietet. Familienfreundlich sind auch Gleitzeit ohne Kernzeit (BKS Bank), Vertrauensarbeitszeit (Bipa), Zeitsparkonten (Spes) und Jobsharing, auch im Management (Ikea). Völlig gratis ist wohlwollendes Mitdenken, etwa Meetings nicht an die heiklen Tagesränder zu legen.

▶ **Baby an Bord.** Vorausblickende Unternehmen haben fertige Wegweiserprogramme in der Lade. Mit diesen nehmen sie schwangeren Mitarbeiterinnen die Unklarheit über ihre berufliche Zukunft. Herzstück ist immer ein „Stay in contact"-Konzept, das die spätere Mama nahe am Unternehmen hält: mit Babyfrühstücken (Baxalta), konsequenten Einladungen zu allen Tagungen (Billa) und unlimitiertem Intranet- und Informationszugang (Österr. Lotterien).

Die wichtigste Maßnahme ist ganz und gar kostenfrei: den Rückkehrtermin nicht zu verdrängen und einen abgesprochenen Arbeitsplatz für die junge Mutter bereitzuhalten. Hilfreich ist auch ein Buddy für die Wiedereinsteigerin (MAM).

Noch mehr Loyalitätspunkte bringen eine interne Babysitterbörse (Steiermärkische Sparkasse), Leih-Omis (Scheuch) oder ein Erste-Hilfe-Kurs für Eltern (BRZ).

Später gibt es dann Kids Days: Einmal im Jahr dürfen die Kinder ihre Eltern zum Arbeitsplatz begleiten, um zu verstehen, was Mami und Papi den ganzen Tag so machen (BIG). Oder gleich die Erlaubnis, die Kids in Notfällen mit in das Büro zu nehmen (IT-Services der Sozialversicherung). An schul-, aber nicht arbeitsfreien Tagen erleichtern Flying Nannies den Eltern das Leben, in den Sommerferien Juniorcamps für bis zu 14-Jährige (Billa).

▶ **Papa wechselt Windeln.** Lang hielt man die Väterkarenz für nicht durchsetzbar. Jetzt boomt sie. Beliebt macht sich, wer zusätzliche Zeit verschenkt: zwei freie Tage nach der Geburt (Bawag PSK) oder zwei Wochen beliebig während des Mutterschutzes (Microsoft).

▶ **Liebe deine Eltern.** Familienfreundlichkeit heißt auch, die Pflege alter und kranker Angehöriger zu ermöglichen. Weil das für die Betroffenen oft ein schambesetztes Tabuthema ist, reichen die Ideen von Sensibilisierung für die Möglichkeit der Pflegekarenz (Bawag PSK) über das Bereitstellen hilfreicher Kontakte und Links (AGES) bis zu Maßnahmen ähnlich jenen für Eltern kleiner Kinder.

▶ **Dies und das.** Einfallsreichtum beweisen Firmen mit Nettigkeiten, die ihren Mitarbeitern das Leben leichter machen: etwa einem Putzereiservice (Baxalta), Firmentransportern für Umzüge (BEST) oder Jahresnetzkarten (BIG). Verbindend wirkt ein „Fest der Kulturen" von Mitarbeitern für Mitarbeiter (Spar). Das Geld ist meist nur sekundär. Es geht um Verständnis und guten Willen.

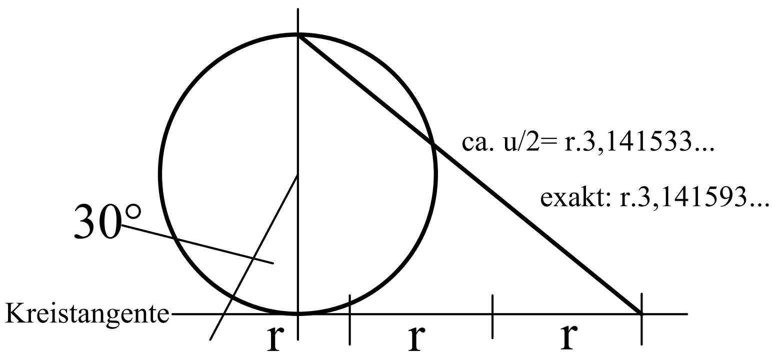
aus "DiePresse", 2./3. Juli 2016

Historisch interessant:

π näherungsweise auf die 10000-stel Stelle genau konstruieren

Aufgabe 4.3: Konstruieren Sie näherungsweise eine Strecke der Länge des halben Kreisumfanges bei r = 5 cm, also die Länge r. π .

Verwenden Sie dazu die durch untenstehende Skizze angegebene **Näherungskonstruktion von KOCHANSKY**. Sie ist einer der genauesten Näherungskonstruktionen und stammt bereits aus dem 17. Jahrhundert. Schreiben Sie für die Konstruktion eine strukturierte verbale Anleitung und führen Sie sie durch. Wie groß ist die Abweichung bei Ihrer Konstruktion vom errechneten Wert? (A4 quer)



4.4 Konstruktionen mit eingeschränktem Werkzeug

Nur mit dem Zirkel vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Mohr-Mascheroni

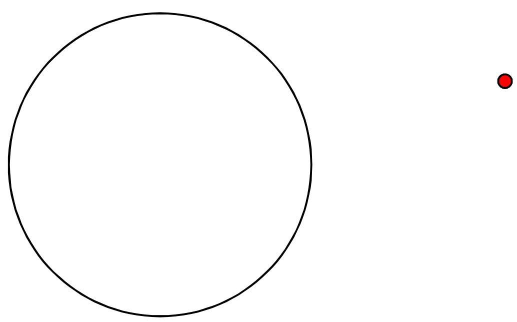
Satz von MOHR-MASCHERONI: Jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann, ist mit dem Zirkel alleine möglich (ohne Bew.).

Georg MOHR (1640 – 1697, Niederlande), Lorenzo MASCHERONI (1750 – 1800, Italien)

Aufgabe 4.4: Verdoppelung einer Strecke nur mit dem Zirkel konstruieren

Nur mit dem Lineal „Linealgeometrie“ vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Linealgeometrie

Aufgabe 4.5: Tangenten aus Punkt an gegebenen Kreis nur mit einem Lineal konstruieren (ohne Bew.).



5. Konstruktive Raumgeometrie

Konstruieren in anschaulichen Parallelrissen

Darunter versteht man in der aktuellen Schulbuchliteratur:
[PILLWEIN, G.; ASPERL, A.; WISCHOUNIG: Raumgeometrie Konstruieren und Visualisieren, OEBV, 2016; vgl. vor allem Abschnitt 4, p57 – p76]

- Körper konstruieren/anschaulich darstellen, Bilder ergänzen, Risslesen (Hauptrisse →Parallelriss, Parallelriss → Hauptrisse)
- Schnitte von Körpern ermitteln (z.B. Würfelsägeschnitte, Kegelschnitte)
- Beispiele der analytischen Geometrie konstruktiv lösen, Kontrollkonstruktionen anfertigen können
- Schatten bei Parallelbeleuchtung darstellen
- Reflexionen – Strahlengänge konstruieren

Arbeiten in zugeordneten Normalrissen (Grund- und Aufriss)

Exemplarisch werden folgende Konstruktionen vorstellt und bearbeitet:

- Messen auf Strecken (**Maßaufgaben**): Ermittlung der wahren Länge, Abtragen von Längen, Neigungswinkel, Knickwinkel, Abbildung von rechten Winkeln
- Schneiden von Geraden und Ebenen (**Lagenaufgaben**)
- Darstellung von Kreisen und Kugeln

Raumvorstellung

Dieses Kapitel soll vor allem der Förderung der ***Raumvorstellung*** durch konstruktive Beschäftigung mit räumlichen Objekten dienen:

Def. 5.1: **Raumvorstellung** ist eine menschliche Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und zu denken.

RV ist bei den meisten Theorien über Intelligenz einer ihrer Hauptfaktoren, wird sie doch bei vielen Berufen als gut ausgebildet vorausgesetzt: Handwerker (Tischler, Mechaniker, …), Mediziner (Röntgenbilder, CT, Ultraschallbilder, …), Techniker (Architekten, Maschinenbauer, …), Piloten … eigentlich jede/r (Landkarten, Selbstbaumöbel, …)
>>> Vgl. Anhang 10.4: Poster zu einem Faktorenmodell der Raumvorstellung
>>> Ein freier Raumvorstellungstest für Schulen http://www.adi3d.at/rif3d/

Ein Teil der folgenden Aufgaben wird in einer sogenannten ***Lernumgebung*** bearbeitet:
Eine umfassende Einführung in LUs gibt z.B.: [HIRT, U; WÄLTI B.: Lernumgebungen im Mathematikunterricht Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte, Klett | Kallmeyer, 3. Aufl. 2012] Bisher bezieht sich der Begriff der Lernumgebungen der Literatur meist auf den Grundschulunterricht.

> *Eine LU für den Mathematikunterricht ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man eine „gute bzw. substanzielle Aufgabe“ nennt. [HIRT, WÄLTI 2012; p13]*

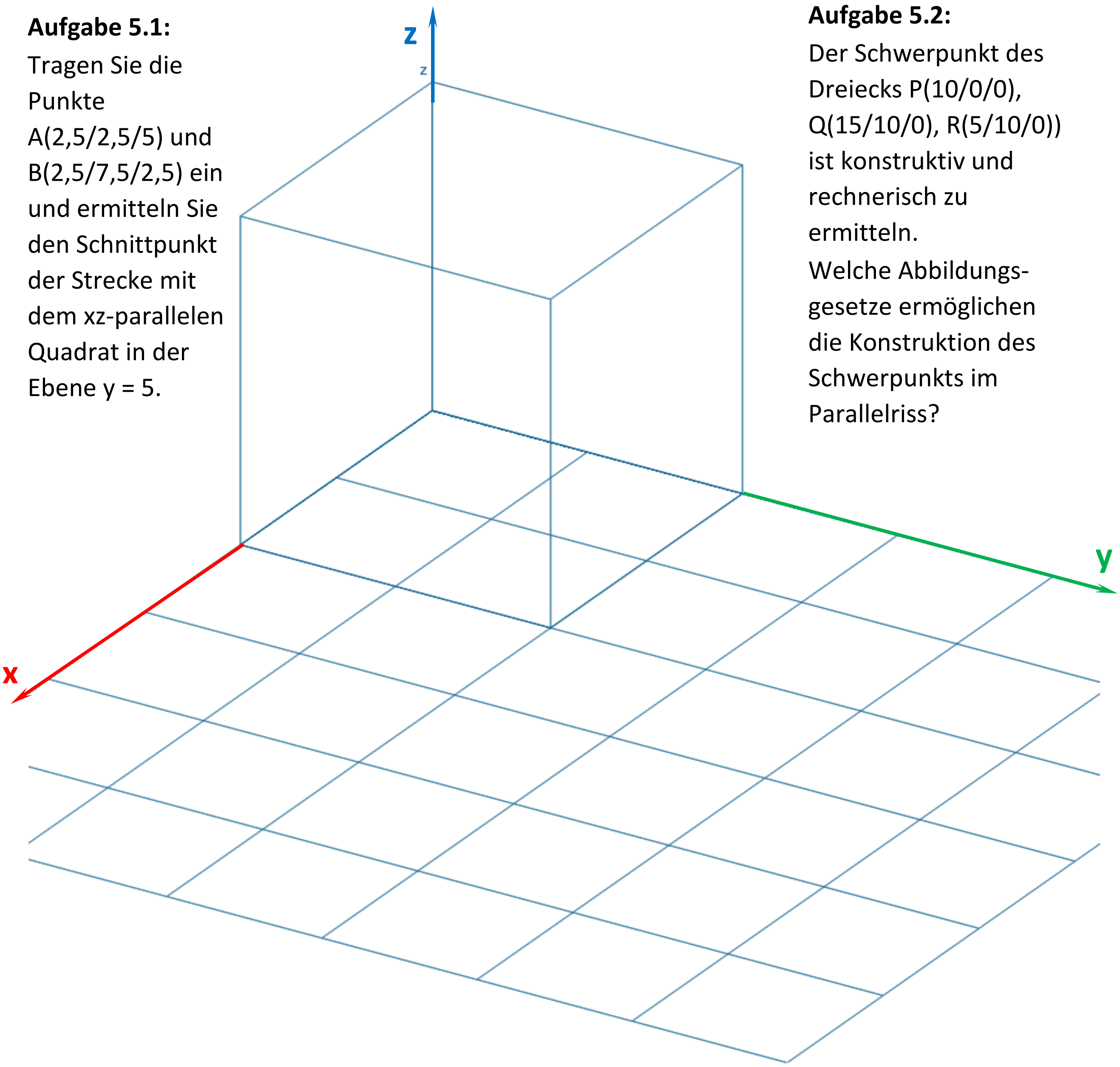
Lernumgebungen …

> … präsentieren zentrale Ziele, Inhalte, Prinzipien des MU.
> … bieten reiche Möglichkeiten für math. Aktivitäten von S&S.
> … sind leicht an spezielle Gegebenheiten einer bestimmten Klasse anzupassen.

5.1 Die Lernumgebung „Würfel“

Bei den folgenden Aufgaben ist jeweils der Parallelriss eines Würfels gegeben, konkret soll als Kantenlänge 5 Einheiten angenommen sein. Der Würfel ist mit dem Raumkoordinatensystem (U, x, y, z) in einfachster Weise verbunden. Drei Kanten liegen in den Achsen x, y und z. Zusätzlich ist manchmal ein Quadrat der Kantenlänge 5 cm angegeben. Dieses kann fallweise als Normalprojektion des Würfels (Grundriss oder Aufriss) gedeutet werden. Einfachheitshalber werden im Parallelriss die Hochindizes p für das Bild weggelassen. Durch die gewählten Achsenverzerrungen ($v_x = 0{,}6$, $v_y = v_z \approx 1$) können die Koordinaten der Angabe oder zu konstruierenden Punkte meist nachgemessen bzw. angegeben werden. Somit steht auch einer analytischen Bearbeitung der Aufgaben nichts im Wege. Die sichtbare Rasterung in der xy-Ebene (2,5 x 2,5) erhöht die Vielfalt an Aufgabenmöglichkeiten.

Aufgabe 5.1:
Tragen Sie die Punkte A(2,5/2,5/5) und B(2,5/7,5/2,5) ein und ermitteln Sie den Schnittpunkt der Strecke mit dem xz-parallelen Quadrat in der Ebene y = 5.

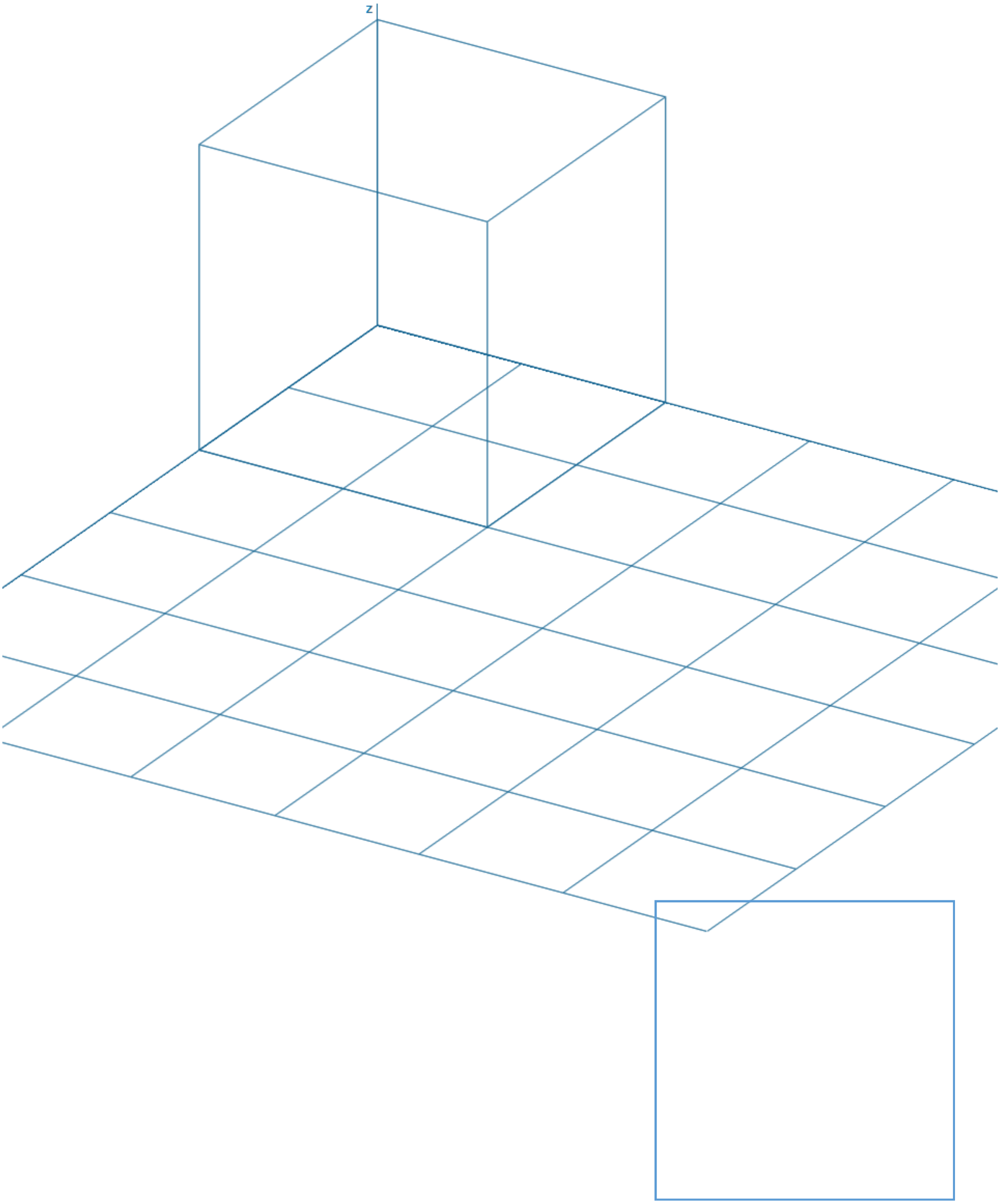


Aufgabe 5.2:
Der Schwerpunkt des Dreiecks P(10/0/0), Q(15/10/0), R(5/10/0)) ist konstruktiv und rechnerisch zu ermitteln.
Welche Abbildungsgesetze ermöglichen die Konstruktion des Schwerpunkts im Parallelriss?

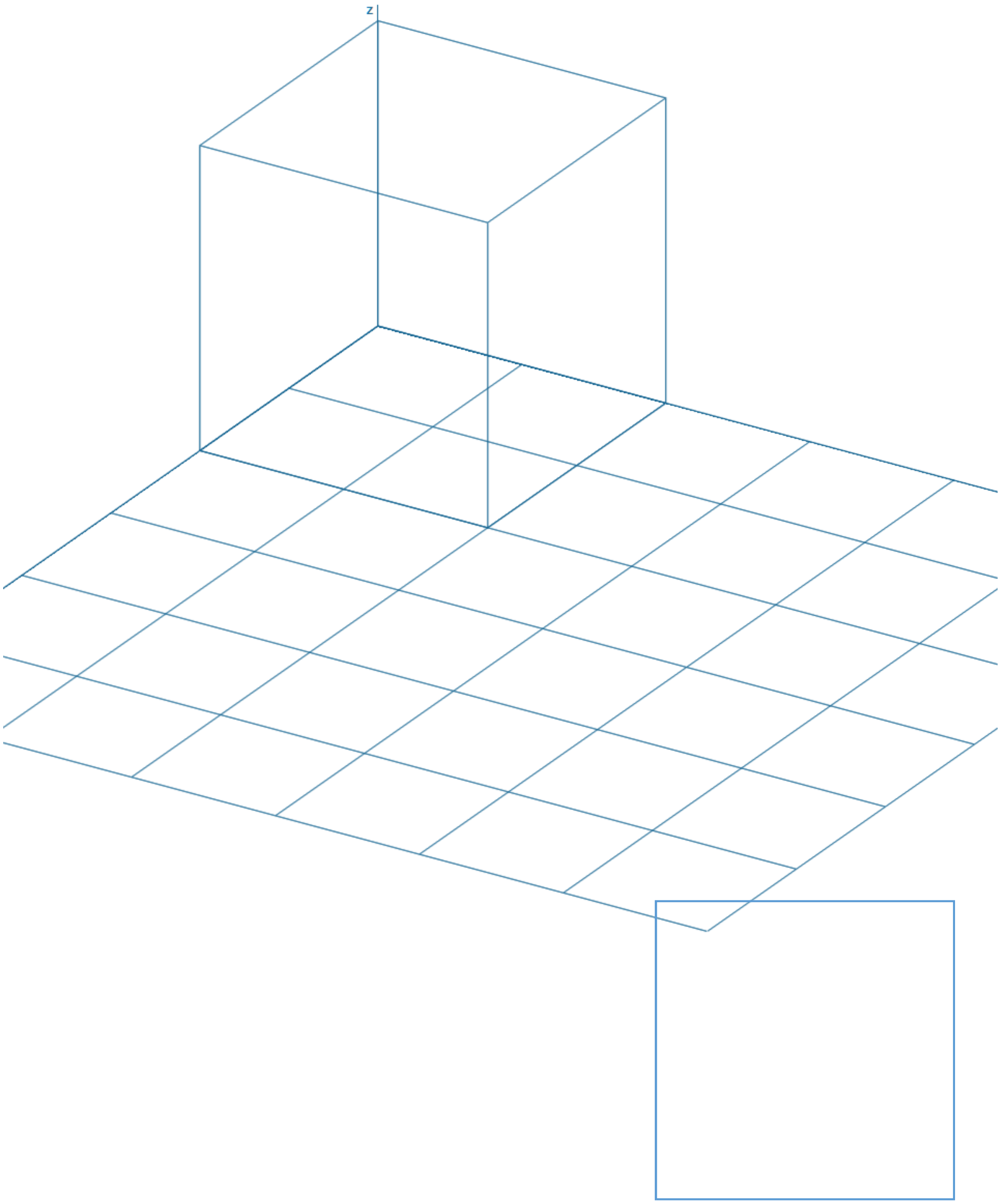
Aufgabe 5.3:

Zeichnen Sie die Gerade durch A(5/5/3) und B(0/5/5).

a. Beschreiben Sie die Lage zu den drei Koordinatenebenen. Konstruieren und berechnen Sie den ersten und zweiten Spurpunkt (= Schnitt mit xy- bzw. yz-Ebene)
b. Wie groß ist der erste Neigungswinkel? (= Winkel zwischen AB und der xy-Ebene)
c. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden durch C(0/10/0), D(2,5(2,5/2,5) mit den lotrechten Würfelflächen.

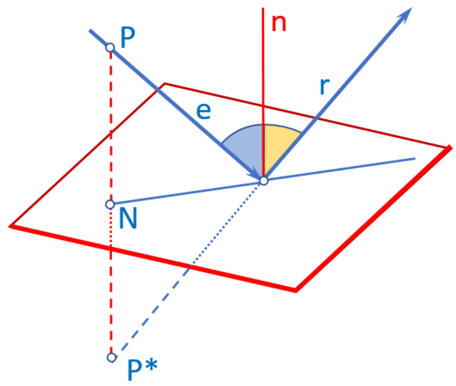


Aufgabe 5.4:
Konstruieren Sie das **Gemeinlot** der Geraden g[A(5/5/3, B(0/5/5)] und h[C(0/0/0), D(5/0/5)]
Darunter versteht man die Strecke mit dem kürzesten Abstand zwischen beiden Geraden.
Diese muss normal auf beide Geraden stehen.

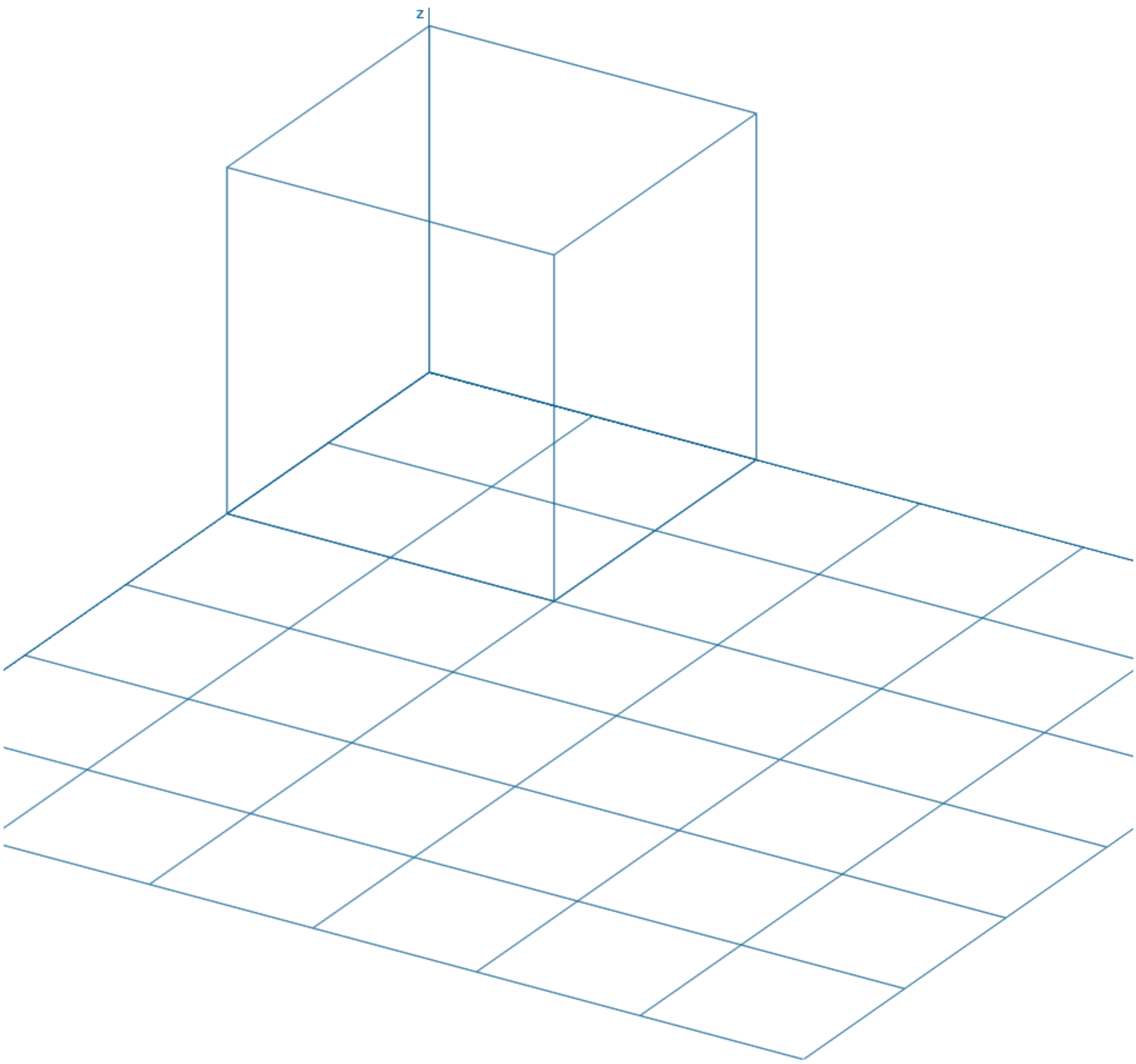


Reflexion

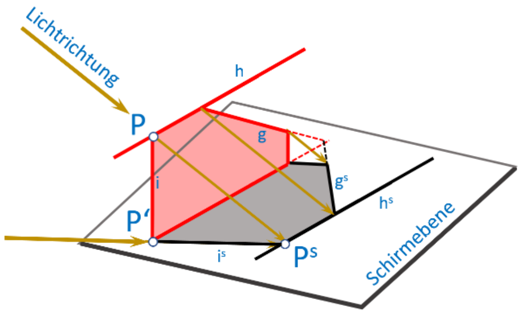
Vorbemerkung: Bei der Reflexion eines Lichtstrahls e an einer ebenen Fläche, liegen einfallender und reflektierter Strahl r in einer Normalebene zur Spiegelebene. Physikalisch gilt die Regel „Winkel zum Lot = Winkel vom Lot“, konstruktiv hilft die Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt P des einfallenden Strahls einen Punkt P* des verlängerten reflektierten (ausgehenden) Strahls gibt, der symmetrisch bezüglich der Spiegelebene liegt. P* kann auf Basis der Teilverhältnistreue einfach ermittelt werden, sobald man den Normalenfußpunkt N zur Verfügung hat.



Aufgabe 5.5:
Ein Lichtstrahl geht vom Würfeleckpunkt G(0/0/5) aus, trifft die xy-Ebene in a) S(5/7,5/0) b) T(5/0/0) und wird daran reflektiert. Konstruieren Sie jeweils den reflektierten Strahl.



Schattenkonstruktionen (Parallelbeleuchtung)



Vorbemerkung: Die Konstruktion des *Schlagschattens* eines Körpers bei Parallelbeleuchtung (auf eine Schirmebene) folgt folgenden Regeln:

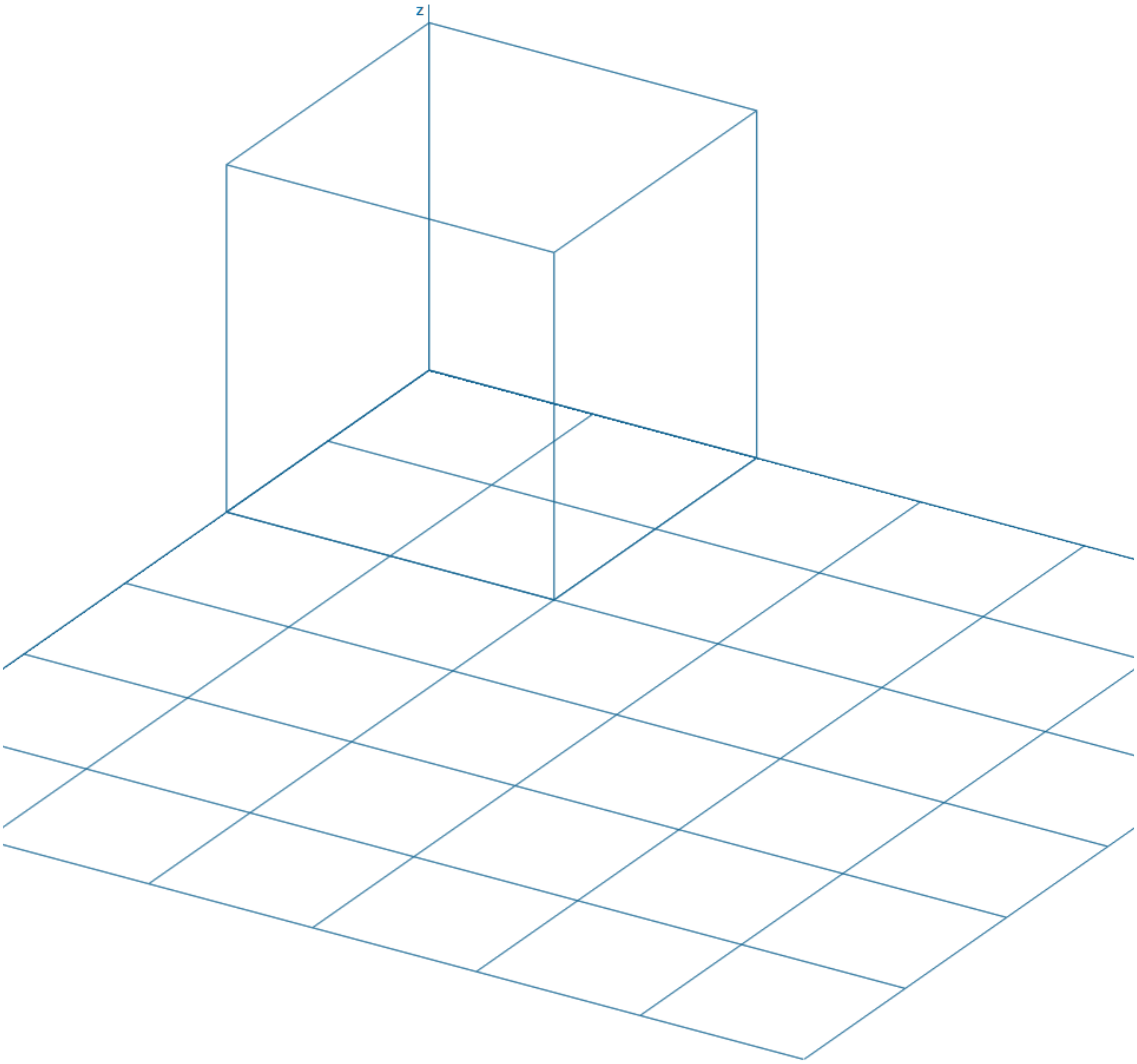
SR 1: Ist eine Kante h parallel zur Schirmebene, so ist ihr Schatten h^s parallel zu h.

SR 2: Ist eine Kante g nicht parallel zur Schirmebene, so geht ihr (verlängerter) Schatten g^s durch den Spurpunkt von g.

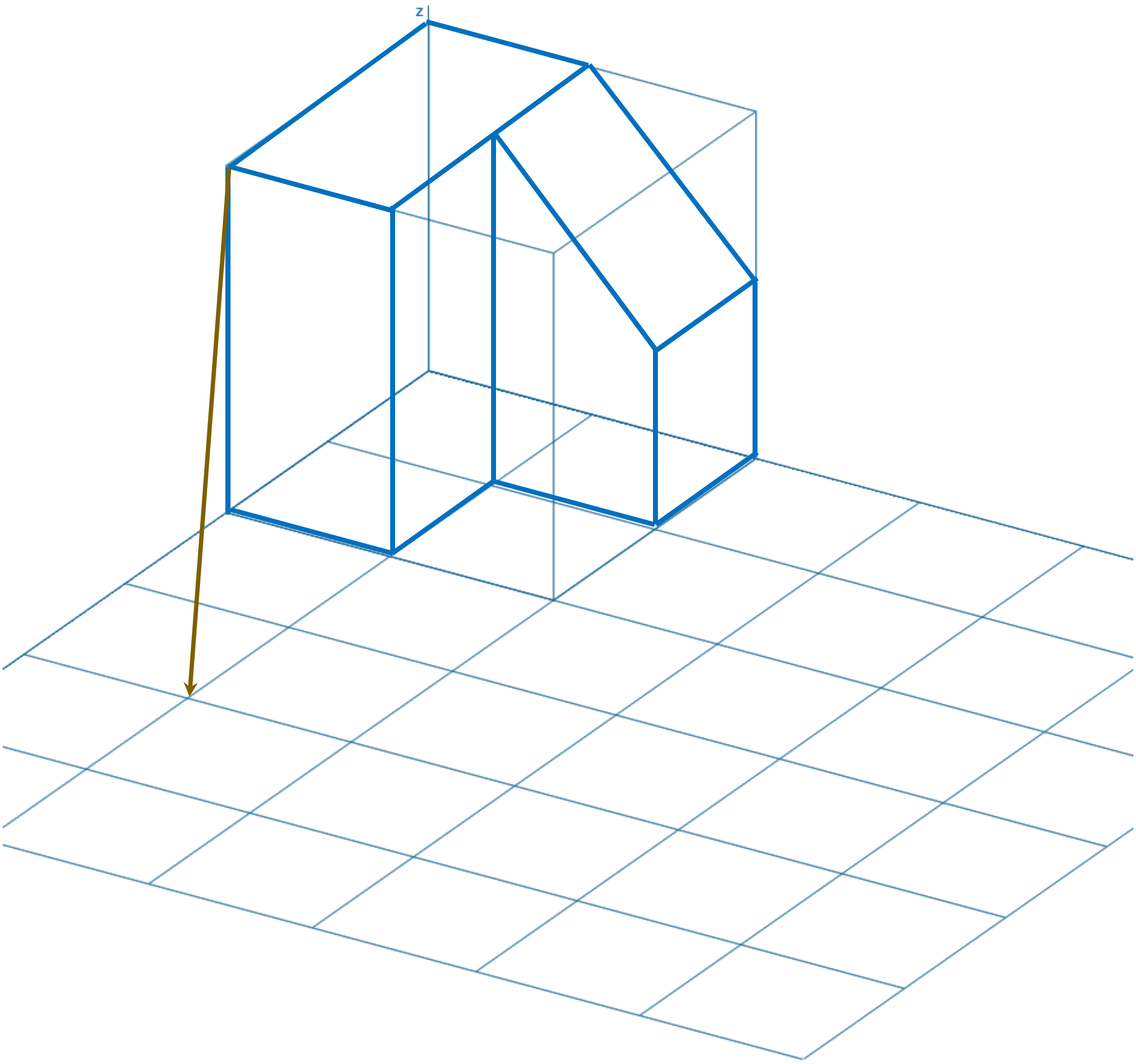
SR 3: Ist eine Kante i normal zur Schirmebene, so ist ihr Schatten i^s parallel zur Normalprojektion der Lichtrichtung auf die Schattenebene.

Aufgabe 5.6:

Die Lichtrichtung ist durch die Punkte A(0/5/5) und B(5/12,5/0) festgelegt. Konstruieren Sie den Schlagschatten des gegebenen Würfels.



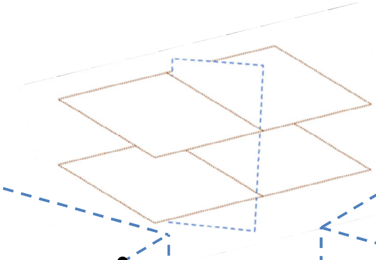
Aufgabe 5.7:
Die Lichtrichtung ist durch die Punkte A(5/0/5) und B(2,5/10/0) festgelegt. Konstruieren Sie den Schlagschatten des gegebenen Objekts.

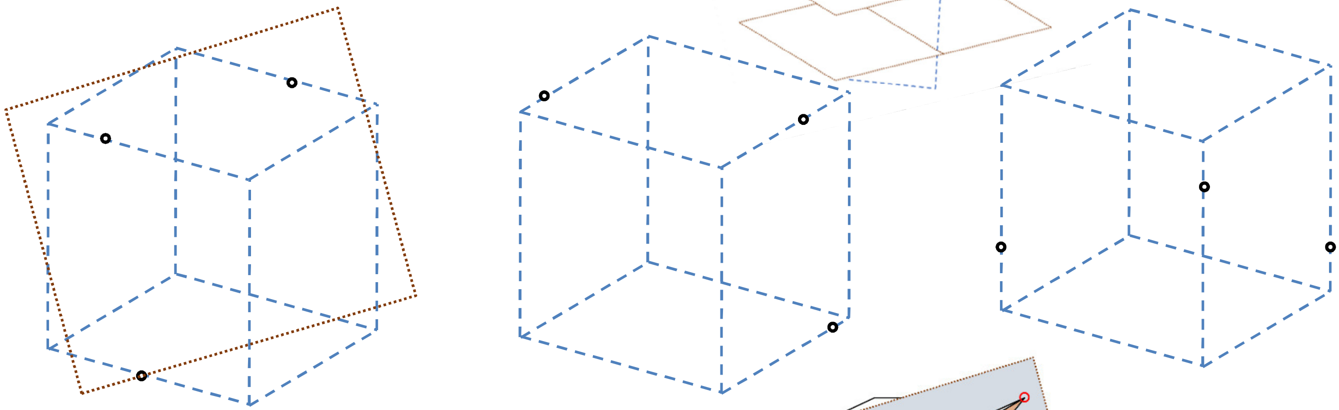


Würfelsägeschnitte

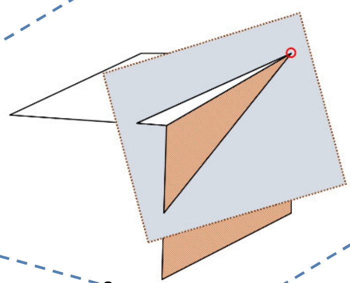
Durch drei Punkte ist eine Ebene bestimmt. In folgenden Beispielen werden diese Punkte immer auf Würfelkanten angegeben. Es ist jeweils der vollständige Schnitt mit dem Würfel zu konstruieren.

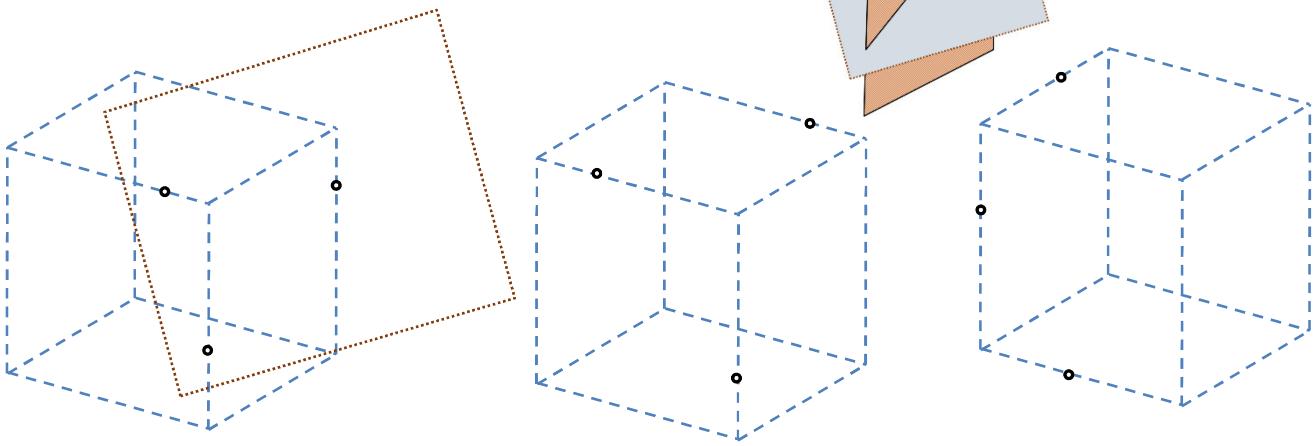
Hilfe 1: Die Schnittgeraden zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene sind parallel.



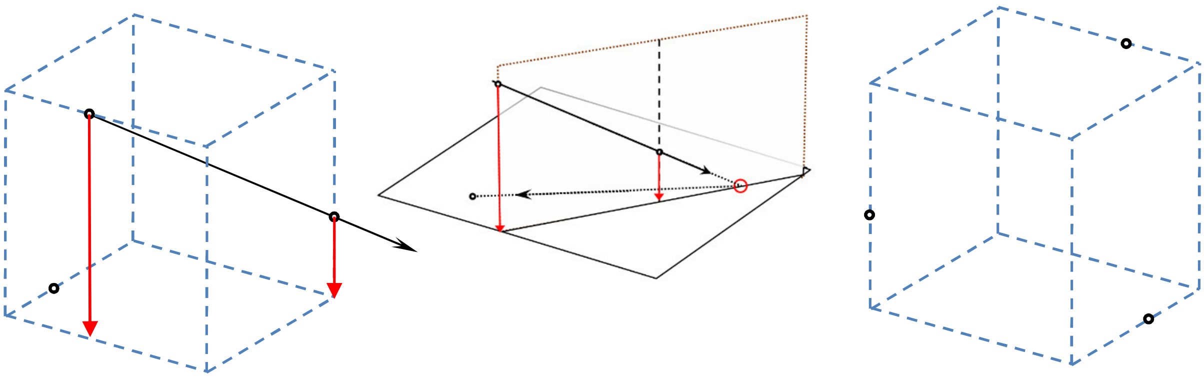


Hilfe 2: Die Schnittgeraden dreier Ebenen allgemeiner Lage schneiden einander in einem Punkt.



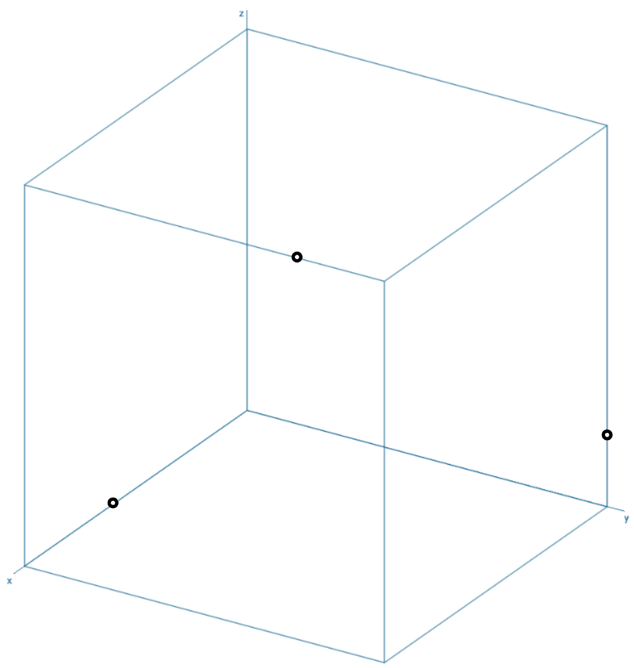


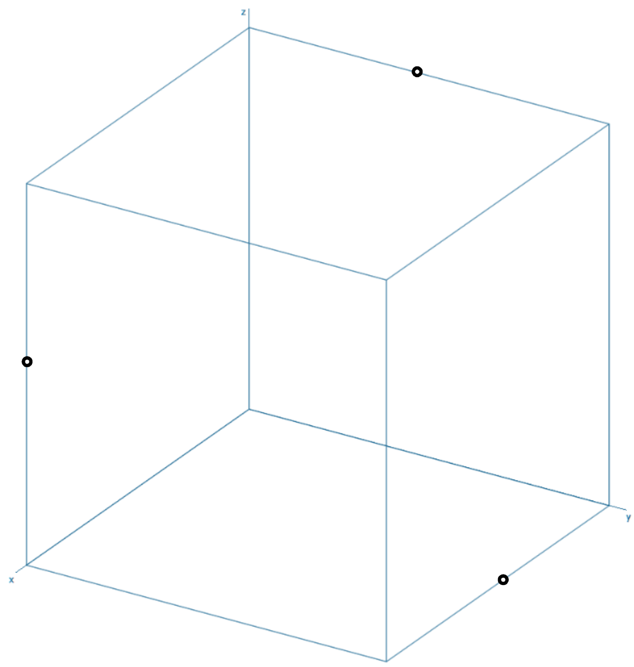
Hilfe 3: Schnittpunkt einer Verbindungsgeraden zweier gegebener Punkte mit einer Würfelebene ermitteln („Spurpunktmethode“, Hilfsebene parallel zu Würfelkanten).

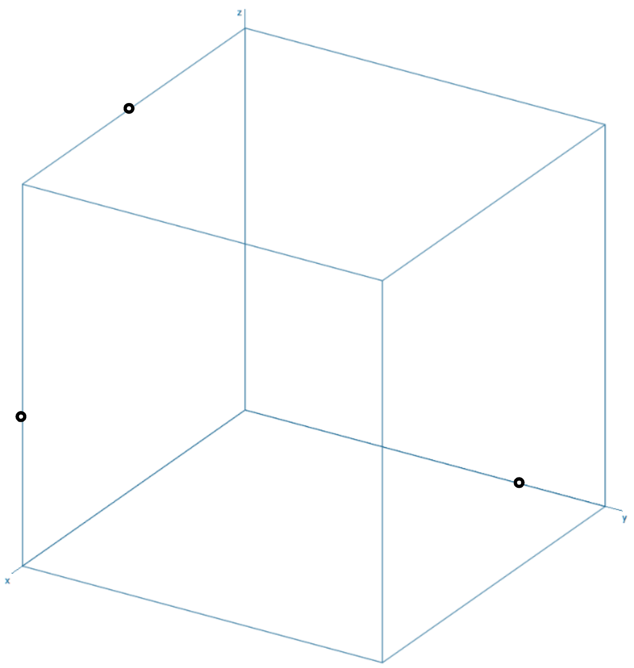


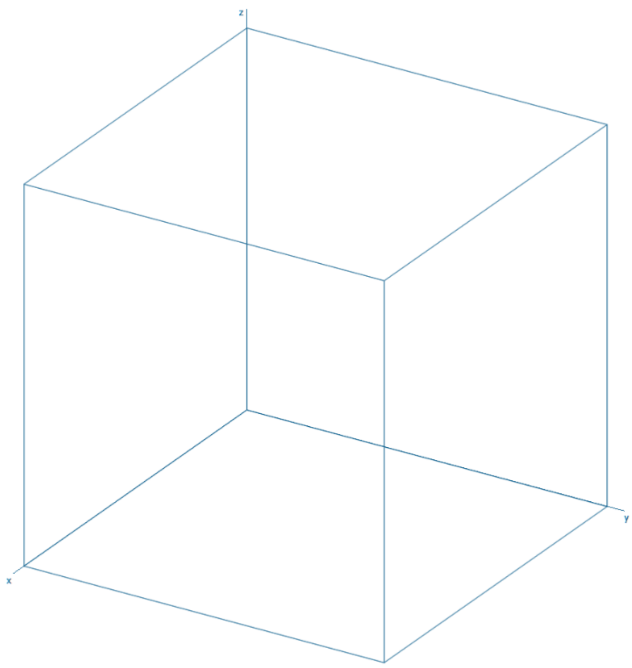
Aufgabe 5.8 a-d:

Gesucht ist jeweils das Schnittpolygon des Würfels mit der durch die drei Punkte festgelegten Ebene. Diese Punkte liegen – wie ersichtlich - auf den Würfelkanten.
(Warum ist diese Bemerkung an sich notwendig, warum möglicherweise nicht ganz korrekt?)





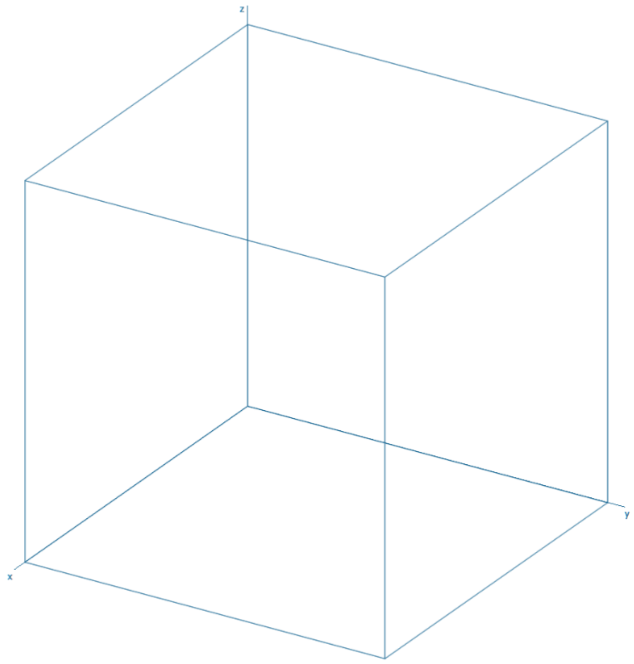


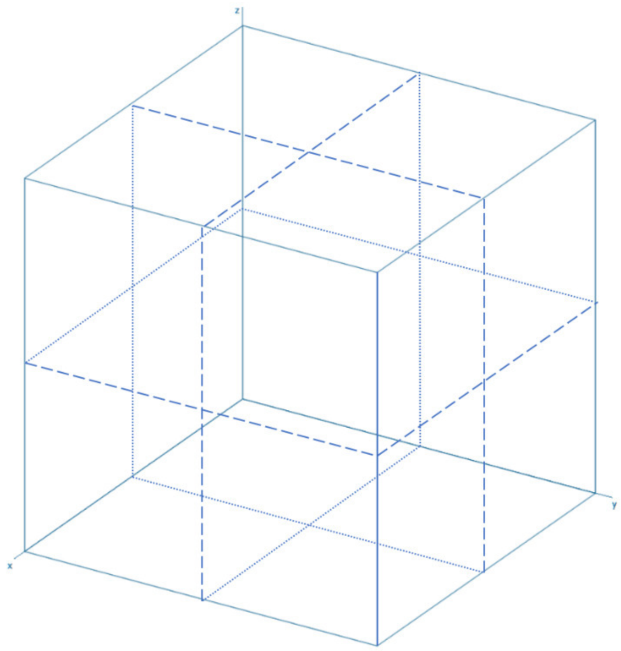


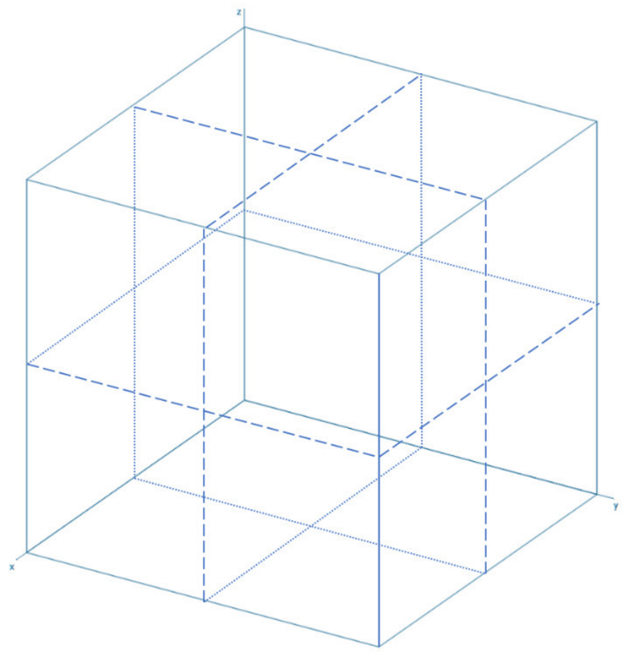
Einfache Körperkonstruktionen – Formenschatz-Erweiterung

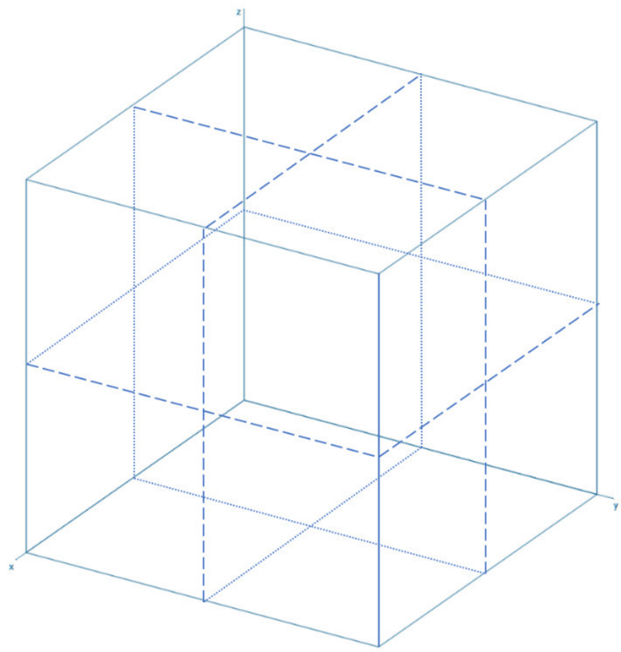
Aufgabe 5.9:

Durch das Eckenabschneiden eines Würfels lassen sich einfache auch in der Sek I berechenbare Körper einfach darstellen und deren Eigenschaften durchschauen.







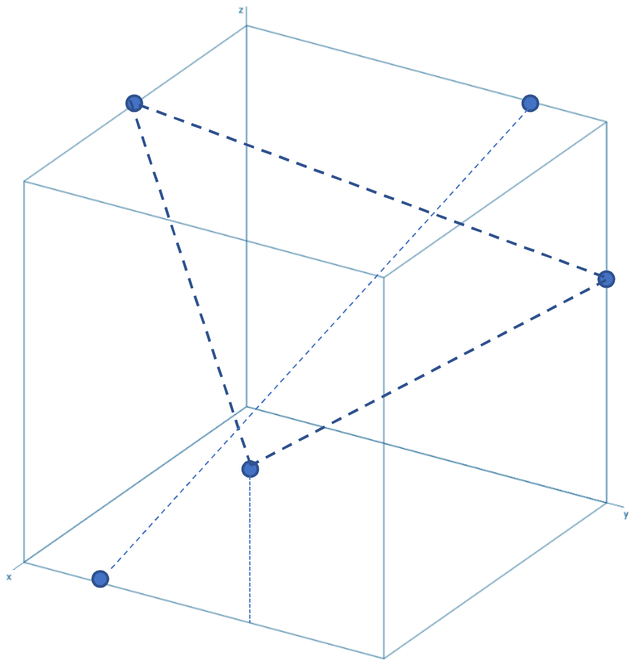


5.2 Lagenaufgaben (=Schnitte)

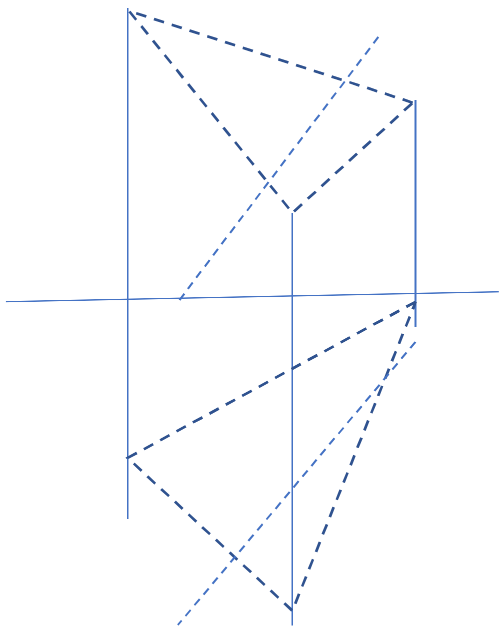
Schnitt einer Geraden mit einer Ebene

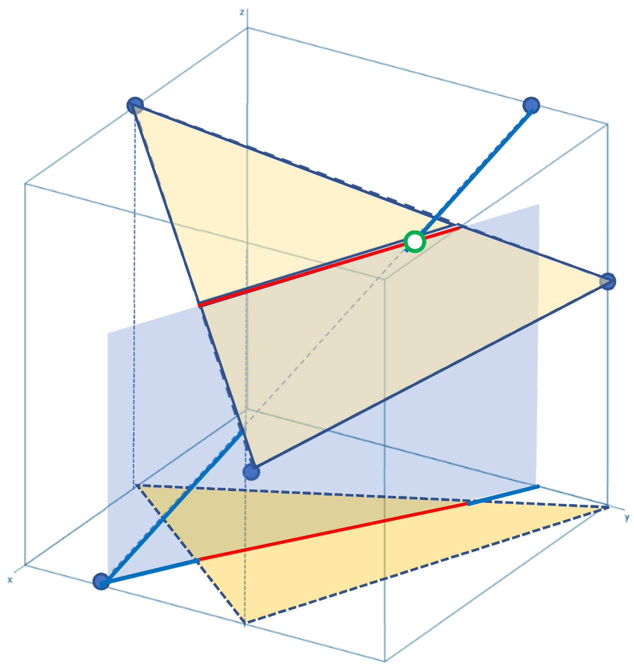
Aufgabe 5.10:

Die durch das Dreieck ABC [A(2,5/0/5), B(5/3/2), C(0/5/3)] festgelegte Ebene ist mit der Geraden g[P(0/4/5), Q(5/1/0) zu schneiden. Konstruieren und berechnen Sie den Schnittpunkt. Stellen Sie das Schnittgebilde unter Beachtung der Sichtbarkeit (unter Weglassung des Würfelbildes) dar.



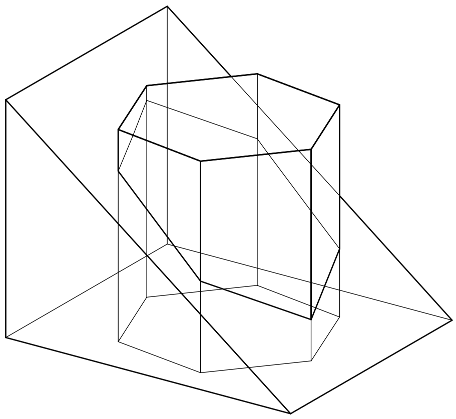
Das Prinzip, das im Parallelriss zum Erfolg geführt hat, kann ohne Einschränkungen in die Überlegungen bei reinen Grund- und Aufrisskonstruktionen übertragen werden.



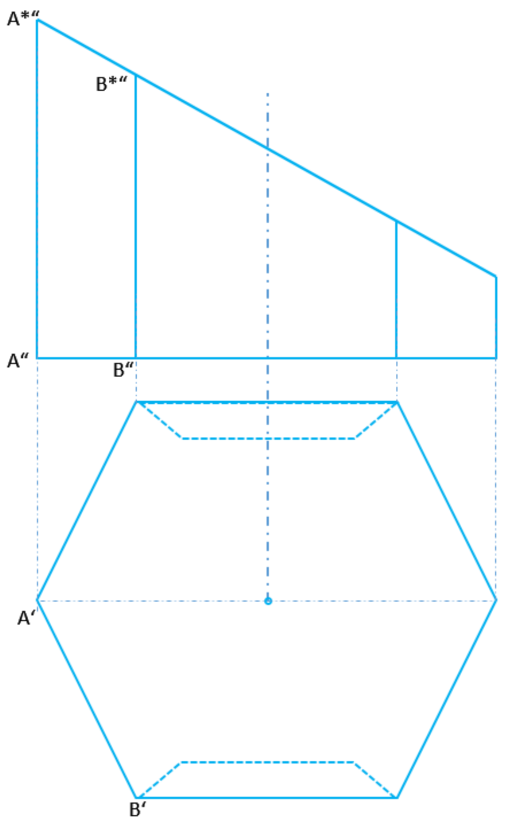


Ebene Prismen- und Pyramidenschnitte

Beachten Sie den Zusammenhang zwischen Basisfigur und Schnittfigur. Er wird im Raum mit „Parallelperspektivität“ und in der ebenen Zeichnung mit „ebene perspektive Affinität“ bezeichnet.



Aufgabe 5.11: Ermitteln Sie das Netz (Verebnung) des Prismenstumpfmantels.

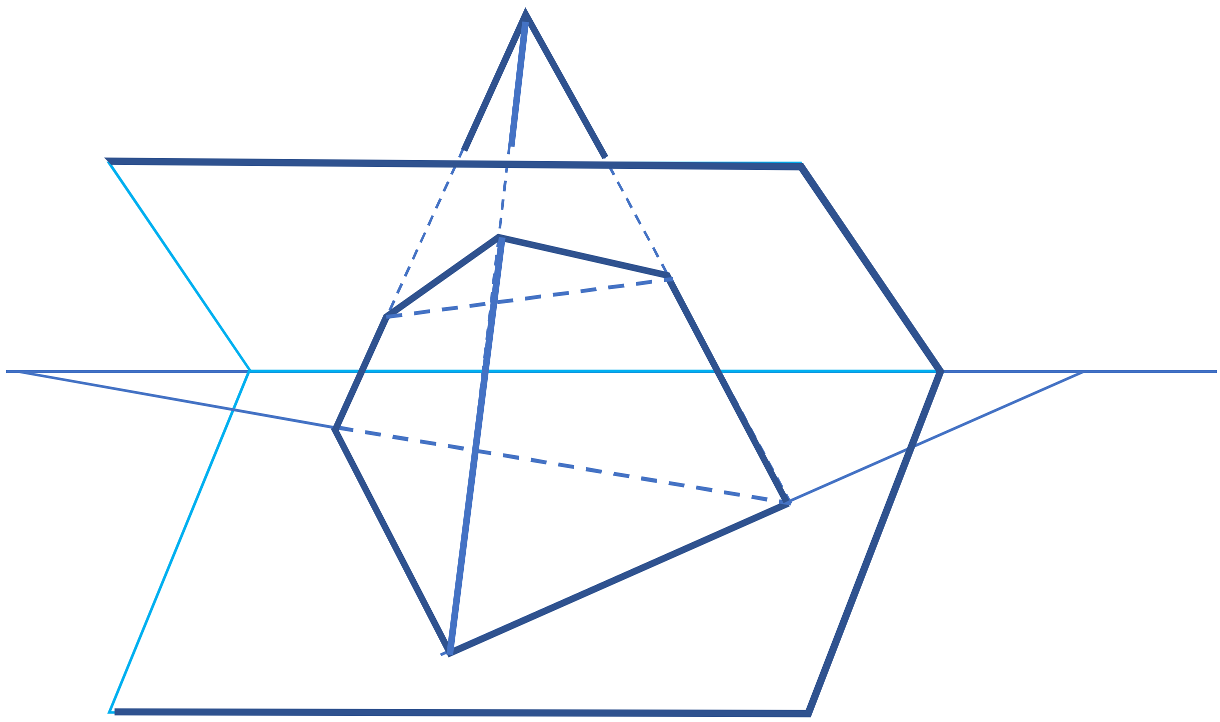


Ebene Pyramidenschnitte

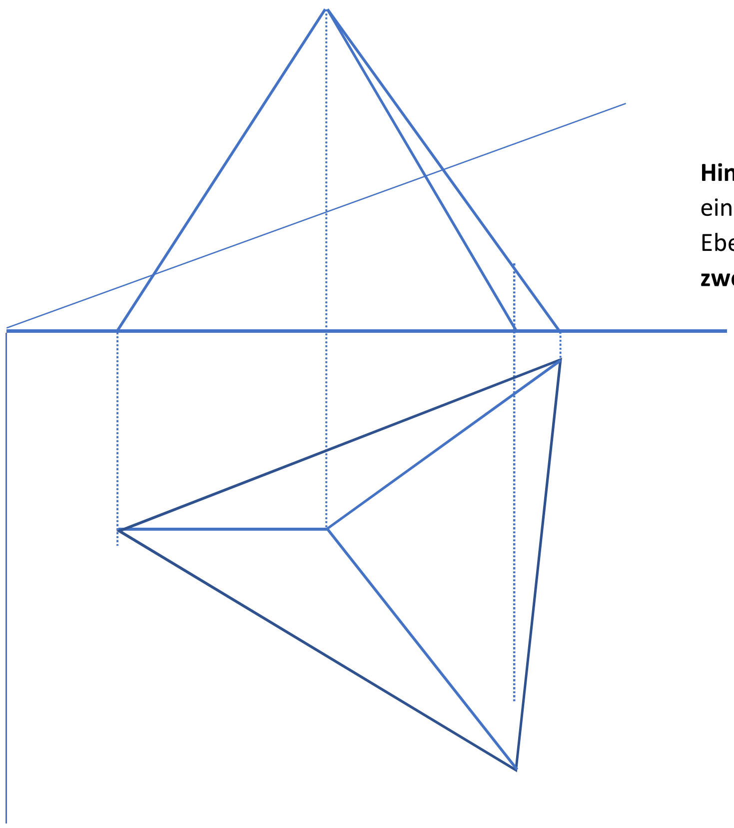
Beim ebenen Schnitt einer dreiseitigen Pyramide kann quasi der Beweis des (an sich ebenen) **Satzes von DESARGUES** erkannt werden:

Satz 5.2: Liegen die Eckpunkte zweier Dreiecke paarweise auf drei Strahlen durch einen Punkt, so schneiden einander entsprechende Dreiecksseitenpaare auf einer Geraden.

(Siehe den affinen Sonderfall davon in Aufgabe 46 im FULMEK-Skriptum der Fachvorlesung.)



Aufgabe 5.12: Ermitteln Sie die Schnittfigur der Pyramide mit der gegebenen Ebene.



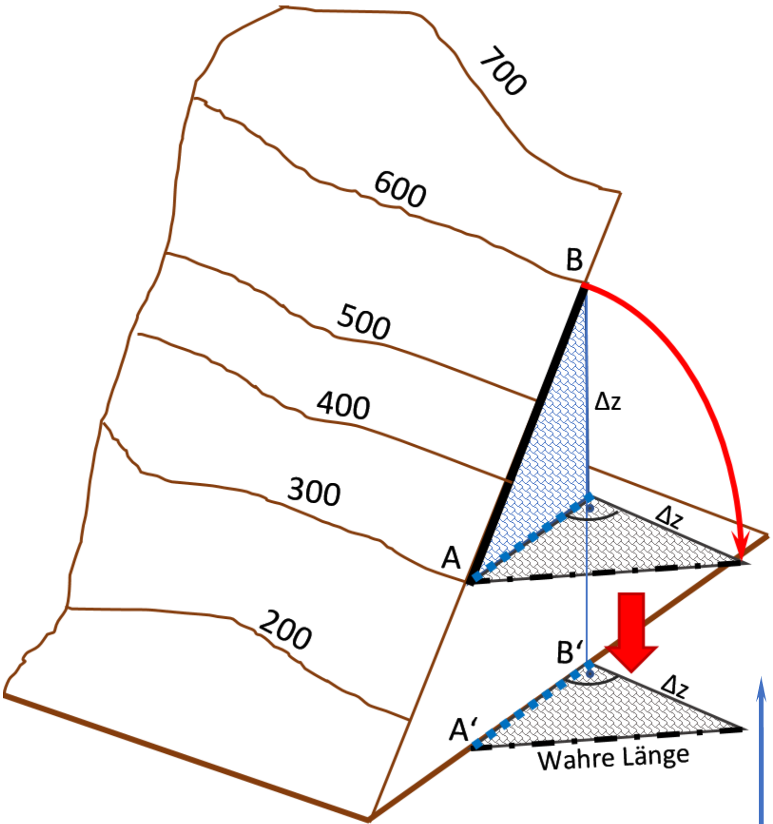
Hinweis: Die Ebene erscheint im Aufriss einfach als Gerade, da sie normal zur yz-Ebene steht. Solche Ebenen nennt man **zweitprojizierend**.

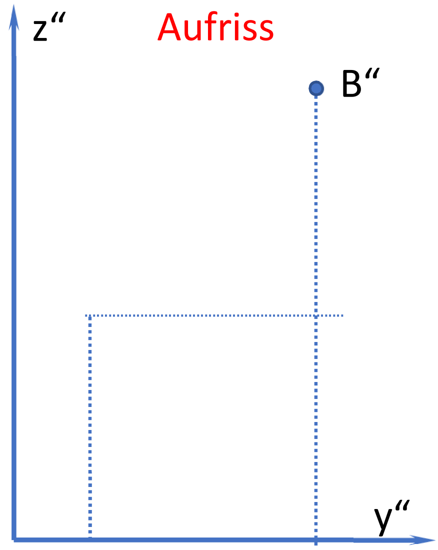
5.3 Arbeiten in zugeordneten Normalrissen

Wahre Länge einer Strecke

Aufgabe 5.13: Von A nach B soll eine Seilbahn gebaut werden. Für eine erste Kostenschätzung sollen die Länge und der Neigungswinkel grafisch ermittelt werden.

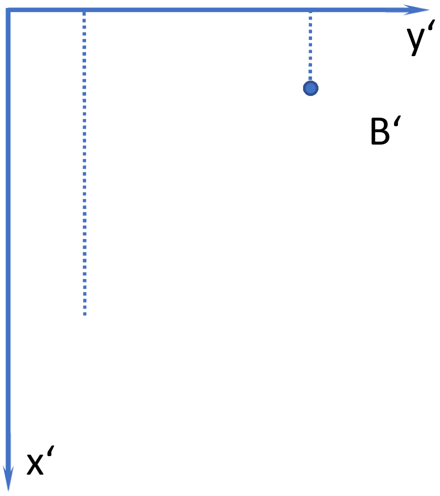
.



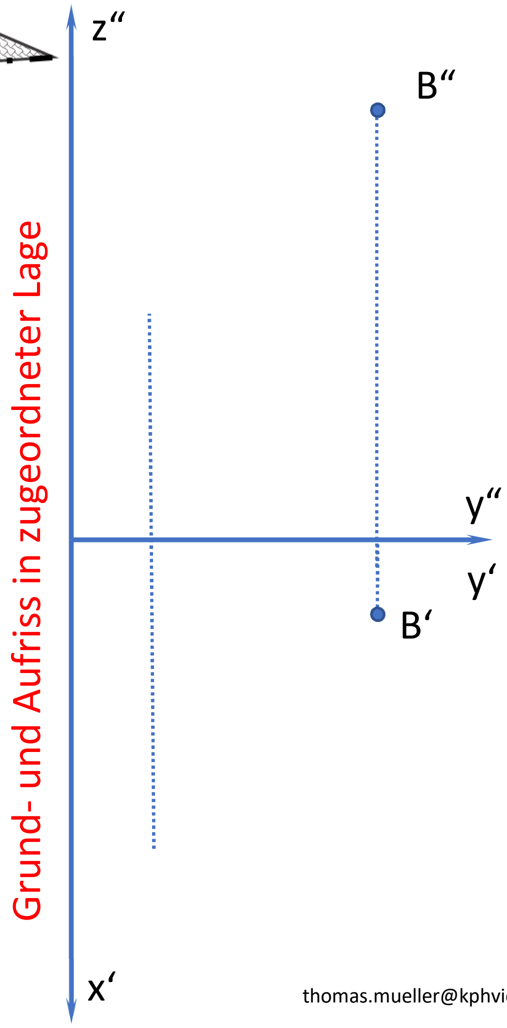


A (4 / 1 / 3)

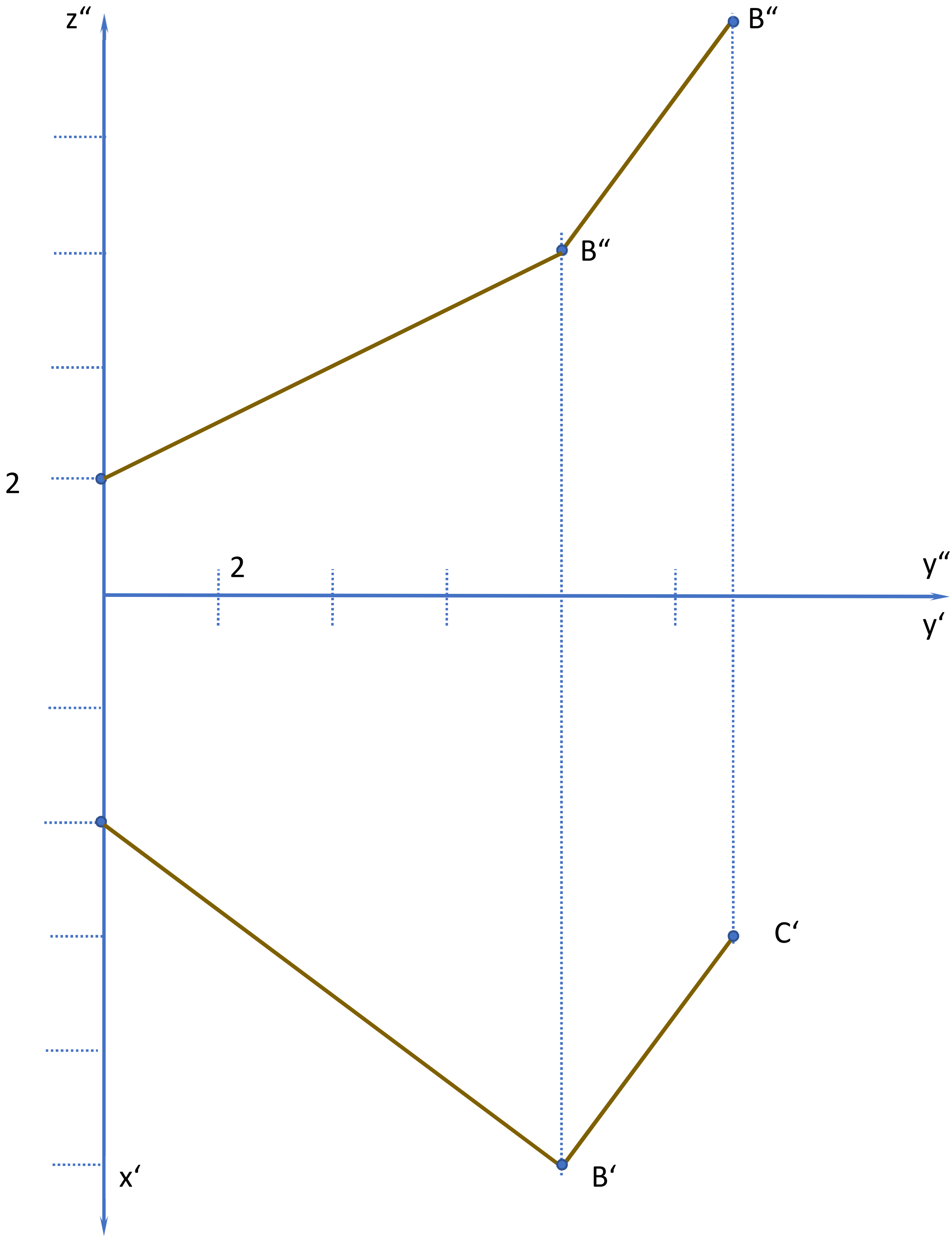
B (1 / 4 / 6)



Grundriss

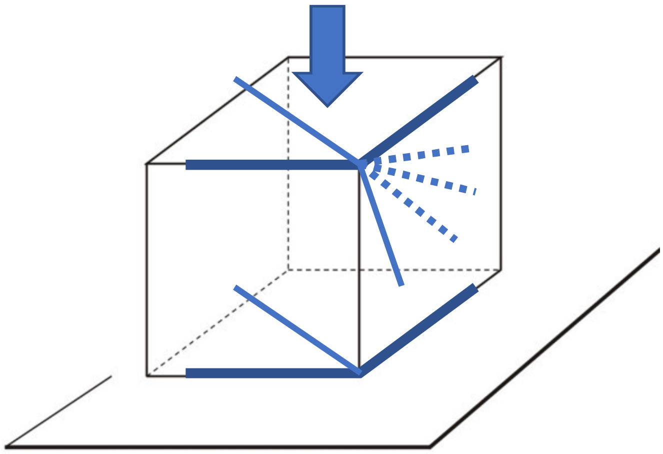


Aufgabe 5.14: Von A nach B und dann nach C soll eine Edelmetallöldruckleitung in einen Motorblock eingebaut werden. Wie groß ist die Gesamtlänge und wie groß im Punkt B der Biegungswinkel der Druckleitung? Kontrollieren Sie die Konstruktion durch eine Rechnung, indem Sie zuvor die Koordinaten der drei Punkte aus der Zeichnung auslesen. Beweisen Sie, dass das Bild des Biegewinkels im Grundriss tatsächlich genau 90° ist.

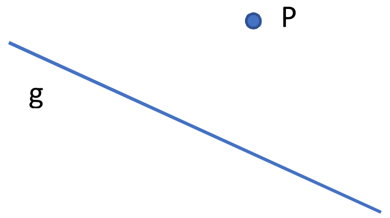


Normale auf eine Ebene

Zunächst muss die Abbildung rechter Winkel geklärt werden.

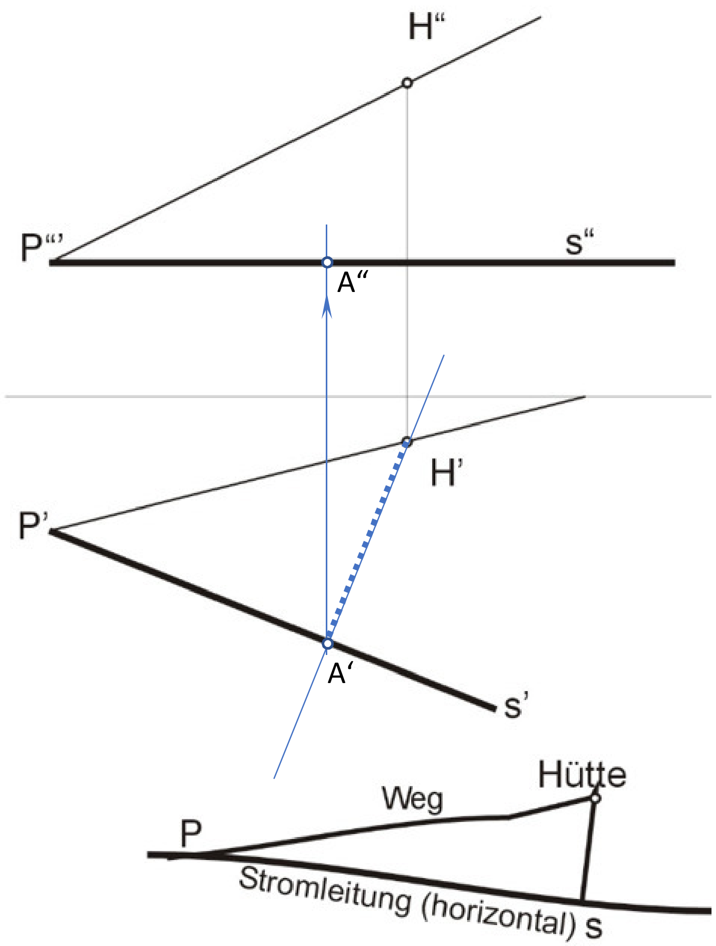


Satz 5.3: Ein **rechter Winkel** erscheint in Normalprojektion genau dann als rechter Winkel, wenn mindestens ein Schenkel parallel zur Bildebene und kein Schenkel normal dazu ist.

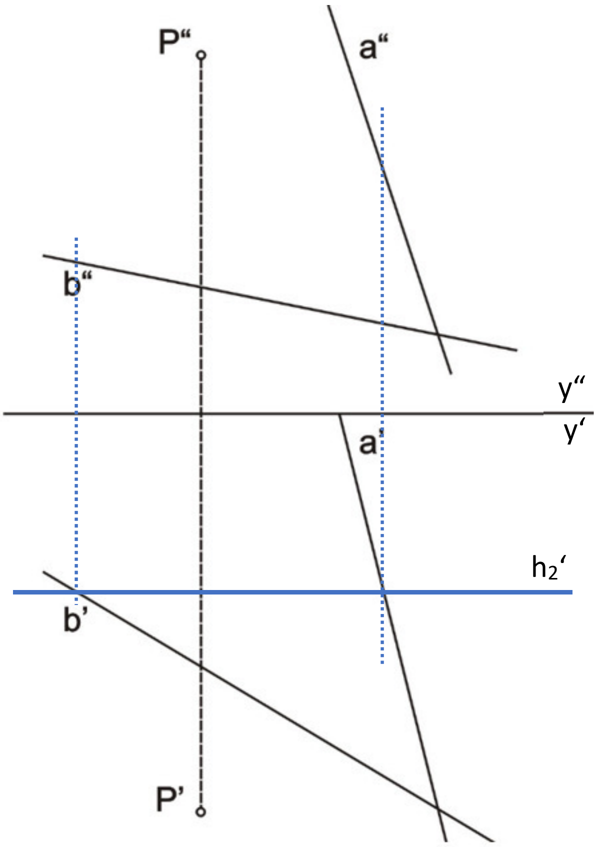


Erinnerung: Der kürzeste Abstand zwischen Punkt P und Geraden g liegt bekanntlich auf der Normalen n von g durch P.

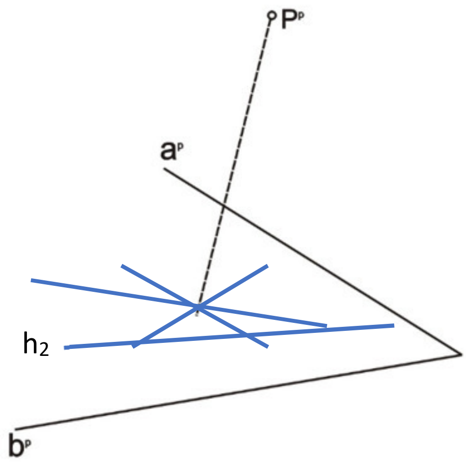
Aufgabe 5.15: Eine Schutzhütte H auf einem steilen Berghang soll auf möglichst kurzem Weg mit Strom, abgezweigt von der horizontal liegenden Stromleitung s, versorgt werden. Begründen Sie, warum die kürzeste Verbindung im Grundriss tatsächlich normal zu s‘ steht, im Aufriss aber nicht.



Aufgabe 5.16: Aus dem Punkt P soll die Normale n auf die durch a und b festgelegte Ebene errichtet werden.

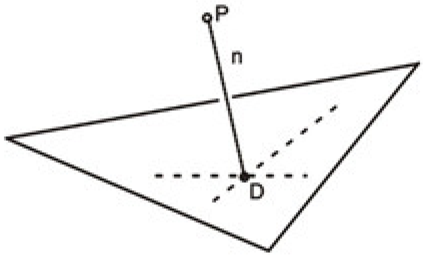


Erinnerung: Wenn n normal zur Ebene (ab) liegt, dann ist n normal auf **alle** Geraden in (ab), also auch auf jene Geraden, die z.B. parallel zur Grund- oder Aufrissebene sind Da der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden gemessen wird, müssen zwei geraden nicht unbedingt einen Schnittpunkt haben, um einen Winkel angeben zu können.

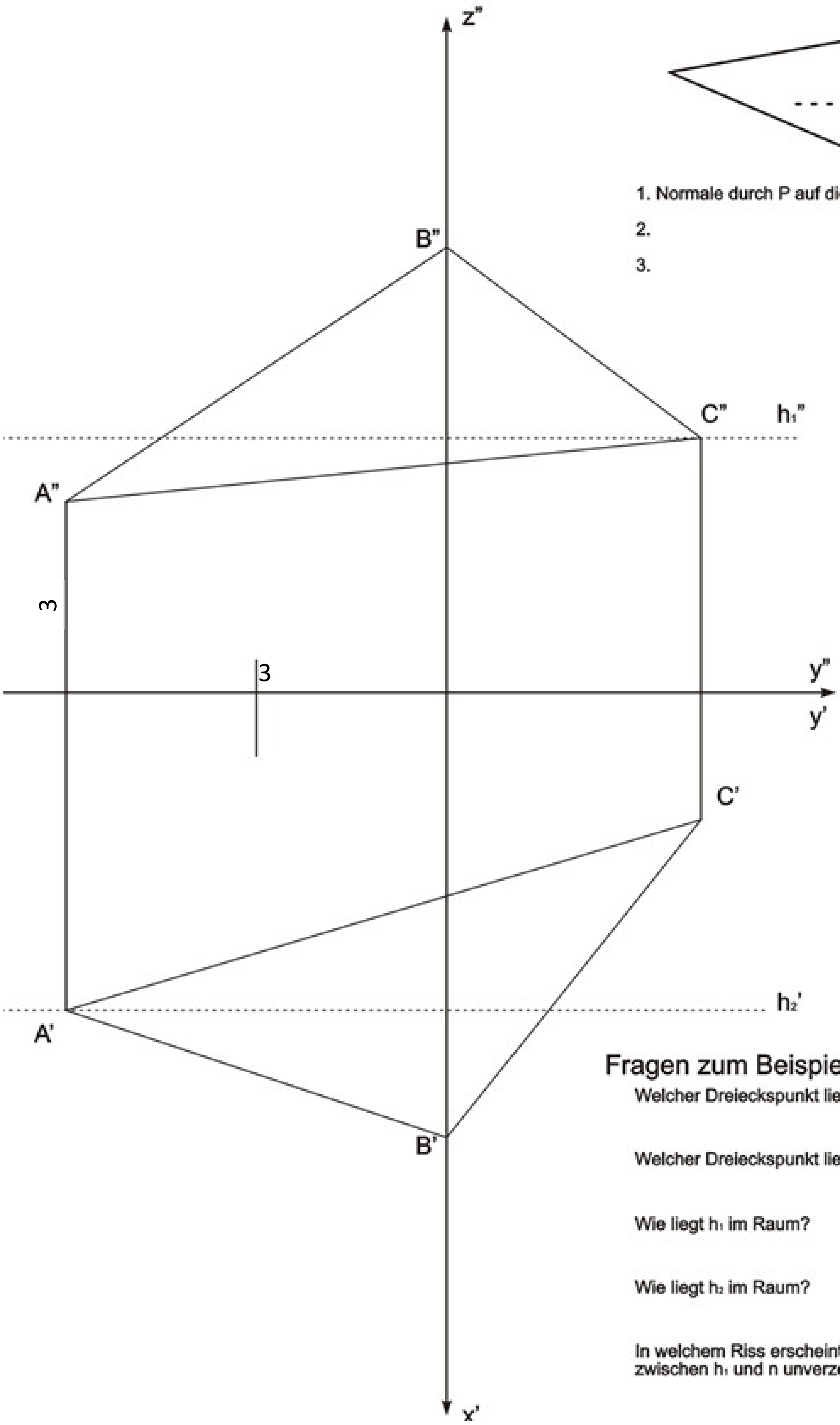


Aufgabe 5.17: Ermitteln Sie den Abstand des Punkts P(1/-3/9) von der durch das Dreieck ABC festgelegten Ebene [A(5/-6/3), B(7/0/7), C(2/4/4)]. Kontrolle durch Rechnung.

Prinzipielle Vorgangsweise:



1. Normale durch P auf die Ebene
2.
3.



Fragen zum Beispiel:

Welcher Dreieckspunkt liegt am höchsten?

Welcher Dreieckspunkt liegt am weitesten vorne?

Wie liegt h_1 im Raum?

Wie liegt h_2 im Raum?

In welchem Riss erscheint der rechte Winkel zwischen h_1 und n unverzerrt?

6. Schlüsselstellen: Kongruenz und Ähnlichkeit

Beziehungen zwischen Objekten beschreiben …

Fachmathematik-Fulmek-Skriptum: „Kongruenz“ (p 35) Kongruenzsatz für Dreiecke | „Strahlensatz“ (p 63f) | „ähnlich“: Definition (p 67 (Def 1.11.2)

Internetsuchtipps: geometry congruence, geometry similarity

Lehrplan 1. Klasse Sek I: Maßstabszeichnungen anfertigen und Längen daraus ermitteln können

Lehrplan 2. Klasse Sek I: Kongruente Figuren herstellen können, die Kongruenz begründen können

Lehrplan 3. Klasse Sek I: Vergrößern und Verkleinern von Figuren, ähnliche Figuren erkennen und beschreiben

Schulanwendung in Beweisen, bei CAD-Zeichnungen, in Trigonometrie, bei Optimierungen/Extremwertaufgaben

6.1 Kongruenz und Kongruenzabbildungen

… Beziehungen zwischen Objekten benennen und herstellen

Konzept 1: Kongruente Figuren entstehen durch Bewegung/Abbildungen, in den Fachmathematikbüchern heute der gängige Weg.

Konzept 2: Kongruenz als Grundbegriff, der einfach als „Deckungsgleicheit“ für ebene Figuren definiert wird, heute in der Schulbuchliteratur der übliche Weg.

Bemerkung: Die Zeit der Abbildungsgeometrie (in den 1970er Jahren in den Lehrplänen der gesamten Sekundarstufe implementiert) ging gerade in der Zeit der Einführung der ersten Softwareprodukte in den Schulen zu Ende.

Symmetrie als Eigenschaft von Figuren wird bereits in der Primarstufe grundgelegt. Oft wird der **Weg vom Falten zur Symmetrie und zur Spiegelung** gegangen.

Dazu:

Symmetrie (5. Schulstufe)
= Eigenschaft einer Figur

Kongruenz (6. Schulstufe)
= Relation zwischen zwei Figuren

Symmetrie → Spiegelung **Kongruenz**

Genauer: **Achsensymmetrie/Axialsymmetrie**

Symmetrie **Spiegelung** **Kongruenz**

Achsensymmetrie

Def. 6.1: Eine Figur heißt **achsensymmetrisch**, wenn man sie durch eine Gerade in zwei „gleiche" Teilfiguren zerlegen kann.

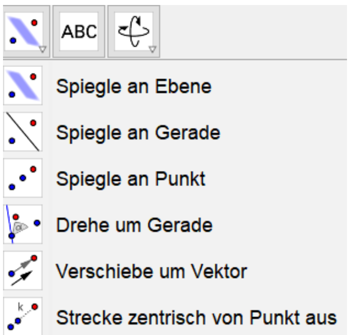
„gleiche" … aber unterschiedlich orientierte
„gegensinnig kongruente"

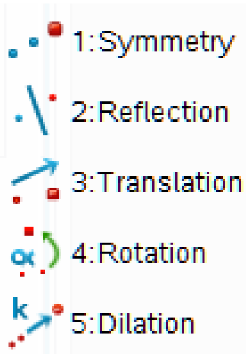
Def. 6.2: Eine Figur heißt **achsensymmetrisch**, wenn sie invariant gegenüber Achsenspiegelungen ist.

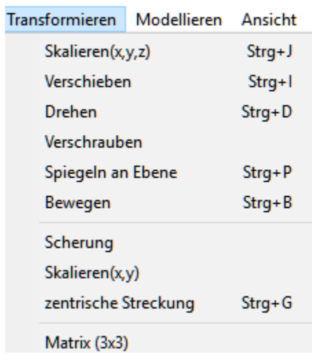
Beispiel: Kanadische Flagge

Die Bedeutung des Abbildungsbegriffes wird beim Arbeiten mit DGS und CAD deutlich.
Vergleiche dazu die Menüpunkte bei verschiedenen Programmen:

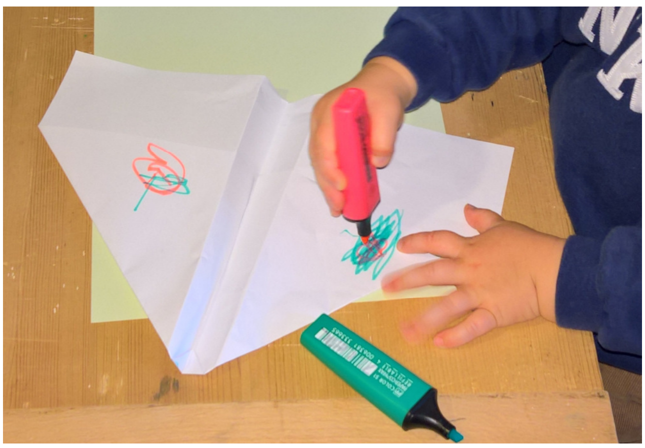
Geogebra 3D **NSPIRE** **GAM**







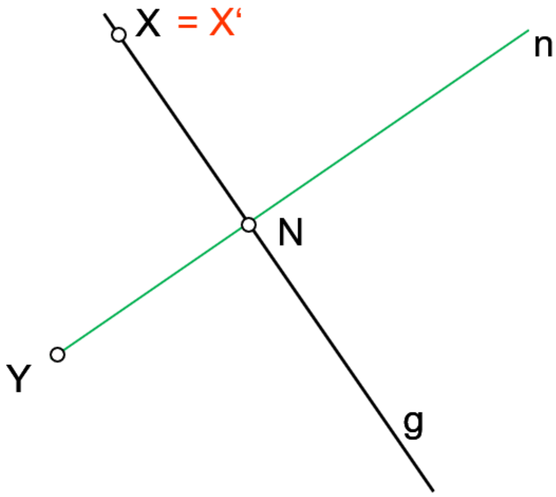
Symmetrieempfinden bei einem Zweieinhalbjährigen:
Ohne Anleitung oder Hinweise wird der Papierflieger spontan symmetrisch „bemalt".



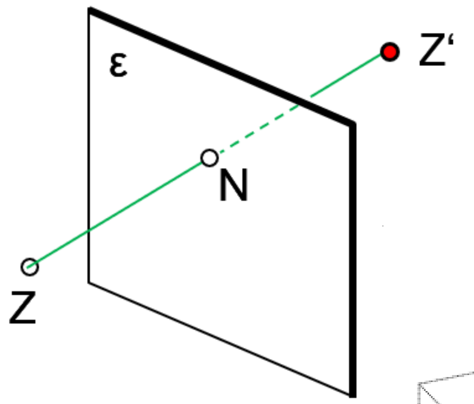
Axialspiegelung

Def. 6.3: Eine **Achsenspiegelung (Axialspiegelung)** ist ein Vorgang / eine Abbildung S_g (im R2 bzw. R3), der/die zu jedem Punkt P einen Bildpunkt P' nach folgender Vorschrift zuordnet:

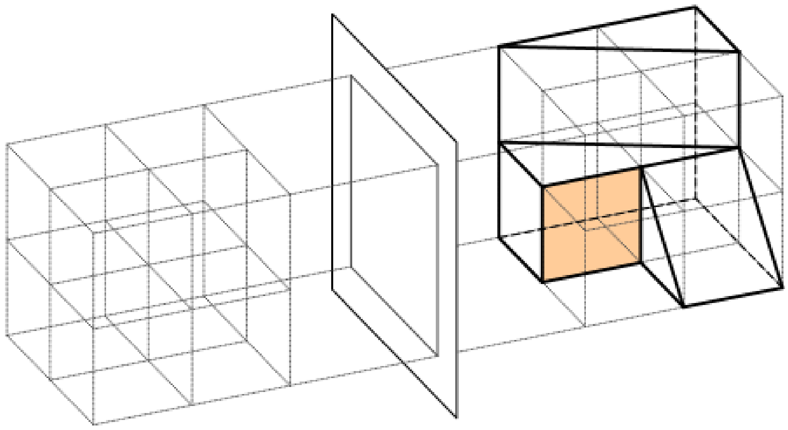
- Wenn $P \in g$, dann ist $P' = P$.
- Wenn $P \notin g$, dann durch P eine Normale n auf g zeichnen und Abstand zwischen P und dem Schnittpunkt N von n mit g auf der Halbgeraden, auf der P nicht liegt, von N aus auf n abtragen → P'



Analog: **Ebenenspiegelung**



Aufgabe 6.1: Das gegebene Objekt ist an der Ebene zu spiegeln.



Quelle ADI CD2 Raumtransformationen: Spiegelung 1
http://www.geometry.at/adi/

Punktspiegelung

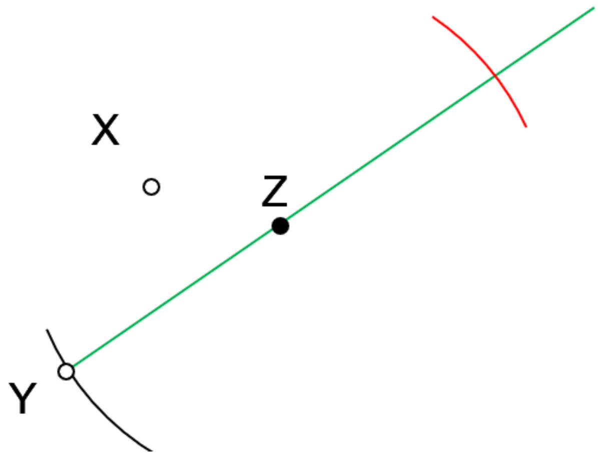
Def. 6.4: Eine **Punktspiegelung** an einem Punkt Z („Zentrum“) ist ein Vorgang / eine Abbildung S_Z, wenn jedem Punkt P ein Bildpunkt P‘ nach folgender Vorschrift zugeordnet werden kann:

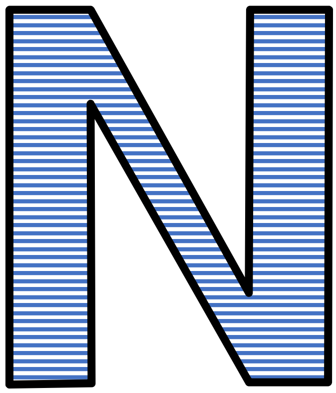
- Wenn P = Z, dann ist P‘ = P .
- Wenn P ≠ Z, dann durch P eine Gerade durch Z zeichnen.
- Abstand zwischen P und Z auf der Halbgeraden, auf der P nicht liegt, von Z aus abtragen → P‘

Aufgabe 6.2a,b:

a) Was lässt sich über die Strecke XY und ihr punktsymmetrisches Spiegelbild X’Y‘ aussagen? Begründung!

b) Das Spiegelzentrum des Buchstaben N ist einzuzeichnen.

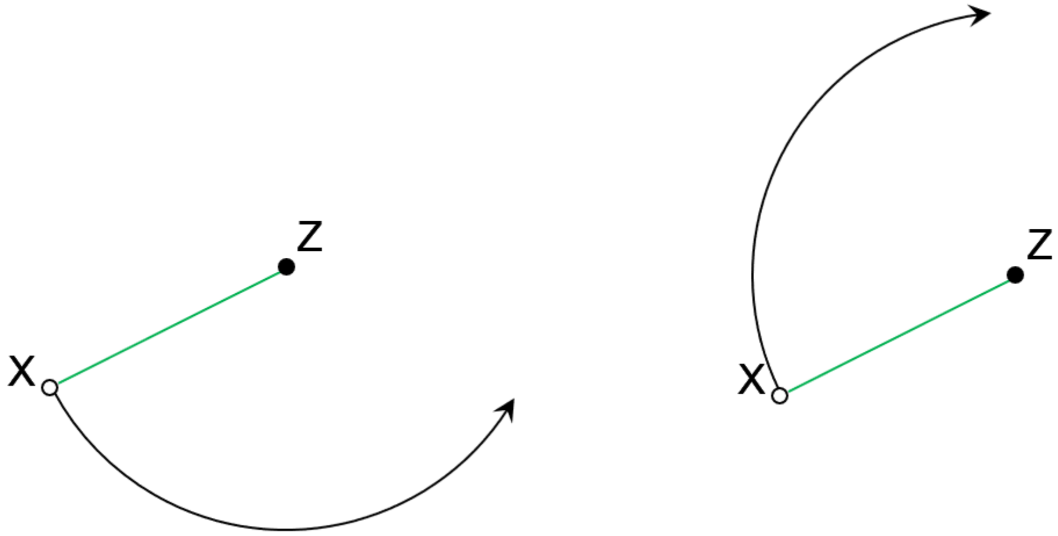




Drehung in der Ebene

Def. 6.5: Eine **Drehung (Rotation) um einen Punkt Z** ist ein Vorgang / eine Abbildung $D_{Z, \varphi}$ der Ebene auf sich, wenn zu jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P‘ nach folgender Vorschrift zugeordnet werden kann:

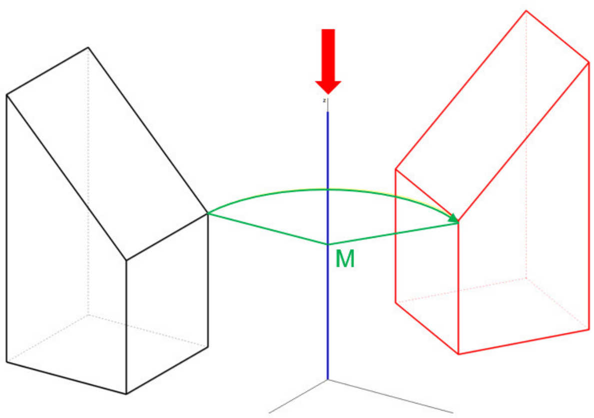
- Wenn P = Z, dann ist P‘ = P .
- Wenn P ≠ Z, dann durch P einen Kreis mit Mittelpunkt Z legen.
- P‘ ergibt sich durch Schnitt des Winkelschenkels <PZP‘ = φ



Drehung im Raum

Def. 6.6: Eine **Drehung (Rotation) um eine Gerade g** ist ein Vorgang / eine Abbildung $D_{g, \varphi}$, bei dem jedem Punkt P ein Bildpunkt P‘ nach folgender Vorschrift zugeordnet werden kann:

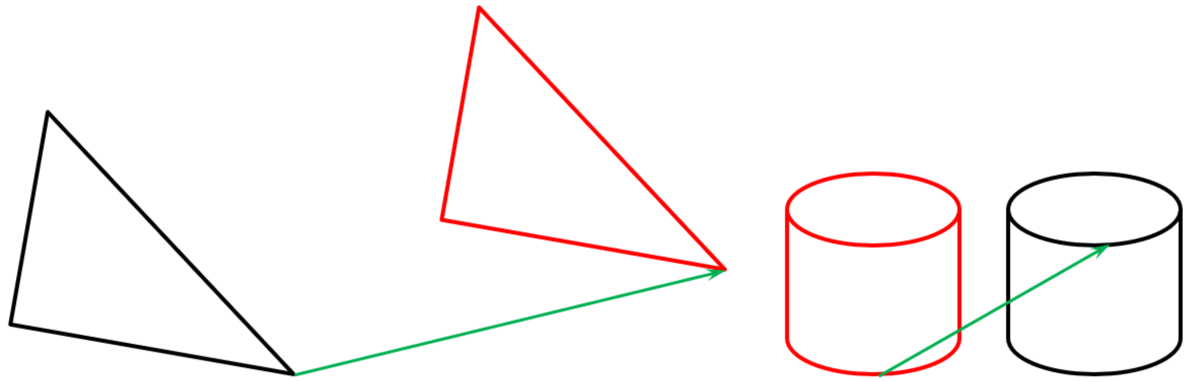
- Wenn P ϵ g, dann ist P‘ = P .
- Wenn P ϵ g, dann durch P einen Kreis in der Normalebene β (⊥g) legen (M = Schnittpunkt von g mit β).
- P‘ ergibt sich durch Schnitt des Winkelschenkels <PZP‘ = φ



Schiebung (Translation)

Def. 6.7: Eine **Schiebung** ist ein Vorgang / eine Abbildung T_v, bei dem jedem Punkt P ein Bildpunkt P' nach folgender Vorschrift zugeordnet wird:

$P' = P + v$ (v … Verschiebevektor)



Kongruenzdefinition nach Konzept 1 (abbildungsbasiert)

Def. 6.8: Zwei ebene Figuren/Körper sind **kongruent**, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, durch die die Figuren/Körper aufeinander abgebildet werden.

In der Ebene:

- Axialspiegelungen
- Punktspiegelungen
- Drehungen
- Verschiebungen
- … sowie alle Verkettungen dieser Abbildungen

Im Raum:

- Axialspiegelungen
- Ebenenspiegelungen
- Punktspiegelungen
- Drehungen
- Verschiebungen
- … sowie alle Verkettungen dieser Abbildungen
  z.B. Schraubung (= Schiebung + Drehung)

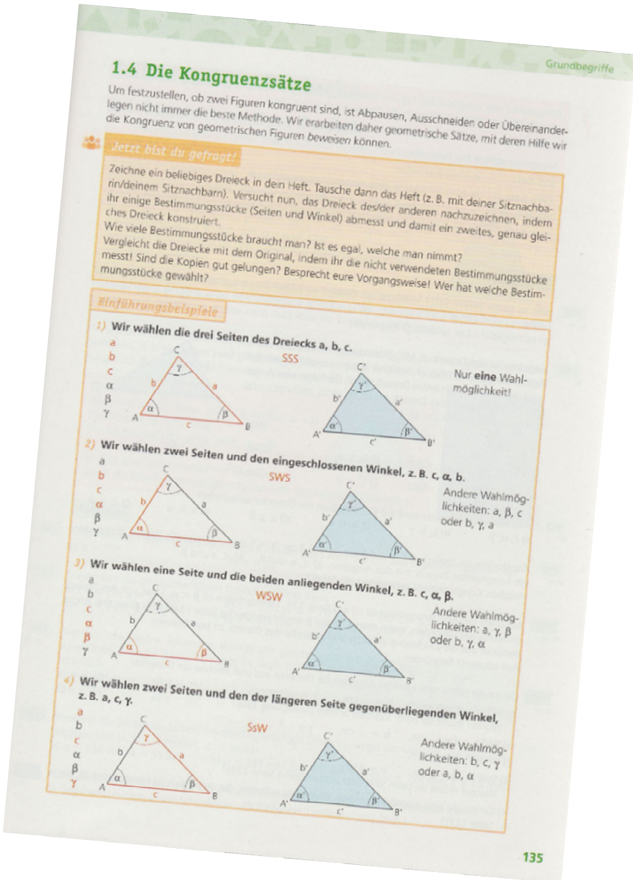
Kongruenz von Dreiecken

Üblicherweise wird die Kongruenz von Figuren im Unterricht auf die Kongruenz von Dreiecken zurückgeführt, für welche wiederum die vier bekannten **Kongruenzsätze** zum Standard gehören. Daneben ist auch die Bezeichnung **Konstruktionssätze** sinnvoll und üblich, da die vier Voraussetzungen immer zu eindeutigen Lösungen von Dreiecksaufgaben führen.

Hier sei wieder auf das Fachmathematik-Fulmek-Skriptum (Kap 1.6. „Bewegungen" Kongruenzsätze 1.7 Satz 1.7.2) verwiesen.

Wie die Umsetzung im Unterricht erfolgen könnte, zeigt z.B. Mathematik Verstehen-Üben-Anwenden 2, p 135, veritas

SSS, SWS, WSW, SSW



Grundbegriffe

1.4 Die Kongruenzsätze

Um festzustellen, ob zwei Figuren kongruent sind, ist Abpausen, Ausschneiden oder Übereinanderlegen nicht immer die beste Methode. Wir erarbeiten daher geometrische Sätze, mit deren Hilfe wir die Kongruenz von geometrischen Figuren *beweisen* können.

Jetzt bist du gefragt!

Zeichne ein beliebiges Dreieck in dein Heft. Tausche dann das Heft (z. B. mit deiner Sitznachbarin/deinem Sitznachbarn). Versucht nun, das Dreieck des/der anderen nachzuzeichnen, indem ihr einige Bestimmungsstücke (Seiten und Winkel) abmesst und damit ein zweites, genau gleiches Dreieck konstruiert.
Wie viele Bestimmungsstücke braucht man? Ist es egal, welche man nimmt?
Vergleicht die Dreiecke mit dem Original, indem ihr die nicht verwendeten Bestimmungsstücke messt! Sind die Kopien gut gelungen? Besprecht eure Vorgangsweise! Wer hat welche Bestimmungsstücke gewählt?

Einführungsbeispiele

1) **Wir wählen die drei Seiten des Dreiecks a, b, c.** SSS — Nur **eine** Wahlmöglichkeit!

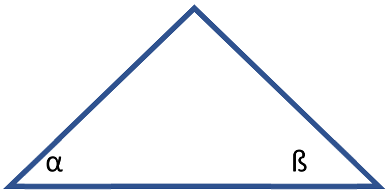
2) **Wir wählen zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, z. B. c, α, b.** SWS — Andere Wahlmöglichkeiten: a, β, c oder b, γ, a

3) **Wir wählen eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, z. B. c, α, β.** WSW — Andere Wahlmöglichkeiten: a, γ, β oder b, γ, α

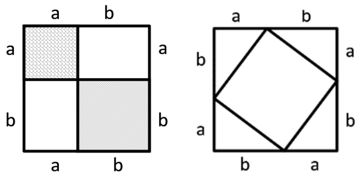
4) **Wir wählen zwei Seiten und den der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel, z. B. a, c, γ.** SsW — Andere Wahlmöglichkeiten: b, c, γ oder a, b, α

135

Aufgabe 6.3: Zeigen Sie mit Hilfe der Kongruenzsätze, dass ein Dreieck mit zwei maßgleichen Winkeln gleichschenkelig ist.



Aufgabe 6.4: Der indische Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS beruht u.a. auf der Kongruenz der vier kleinen rechtwinkeligen Dreiecke im rechten Quadrat. Warum sind sie kongruent? Warum entsteht rechts tatsächlich ein Quadrat nach Abzug der vier Dreiecke?



Ein Experiment zur Drehung

1.Schritt: Man erzeugt eine **Punktmenge** (z.B. Tintenspritzer) auf einem weißen Blatt Papier.

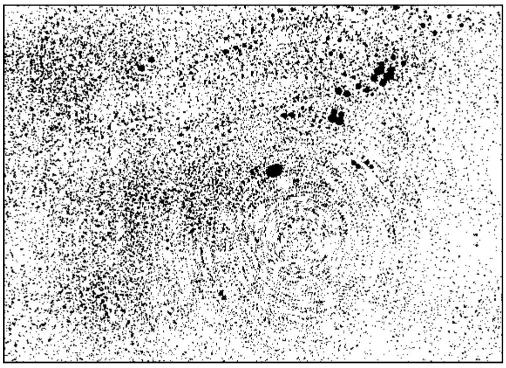
Dann wird dieses zweimal eingescannt, einmal davon mit transparentem Hintergrund (z.B. als *.GIF-Datei)

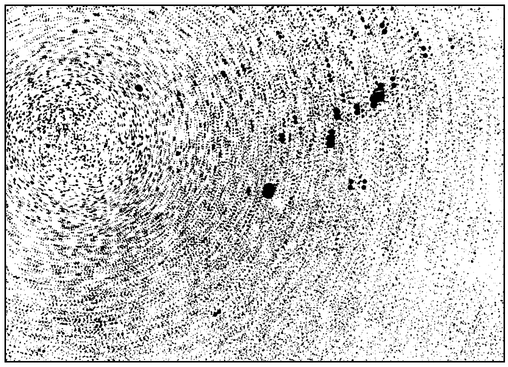
oder

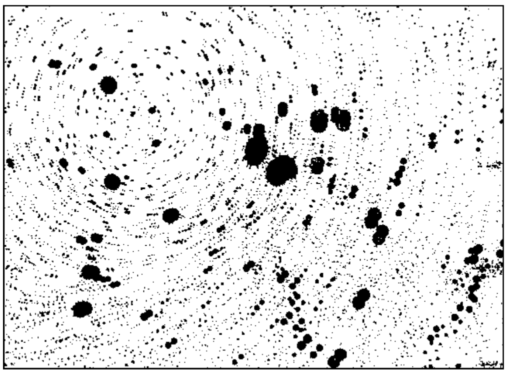
auf eine Transparentfolie kopiert. Falls der Kopierer keine echte Kopie machen kann (Längenverzerrungen v.a. in den Randbereichen), dann macht man am besten zwei Kopien, eine davon auf Folie, diese sind dann sicher deckungsgleich.

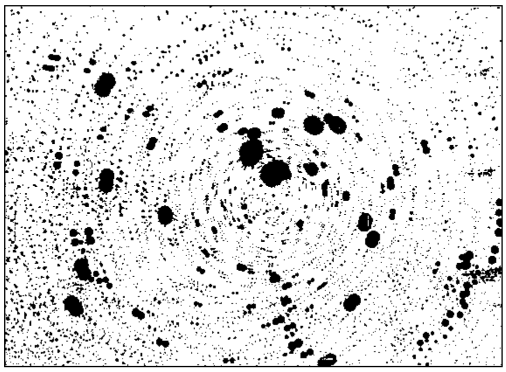
2. Schritt: Die Datei mit transparentem Hintergrund bzw. die Folie wird auf das Original gelegt.

3. Schritt: Wir bewegen die Datei bzw. Folie über dem Original ein wenig - es entsteht ein Eindruck, wie er in den folgenden Kopien wiedergegeben ist:









Was bedeutet dieses Ergebnis?

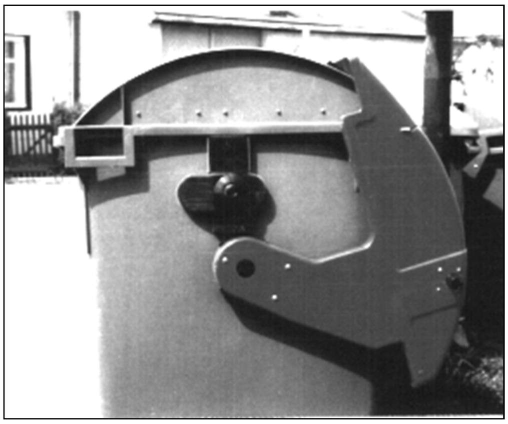
Wir vereinfachen zunächst: Statt der vielen Punkte betrachten wir nur noch je zwei Punkte A wird auf A' kopiert, B auf B'. Durch die Angabe zweier Punkte (A', B') ist die Folie der Lage nach eindeutig festgelegt. Um dies einzusehen stelle man sich etwa zwei Nadeln vor, mit denen man die Folie zunächst in A' fixiert (es sind nur noch Drehungen um A' möglich), dann in B'.

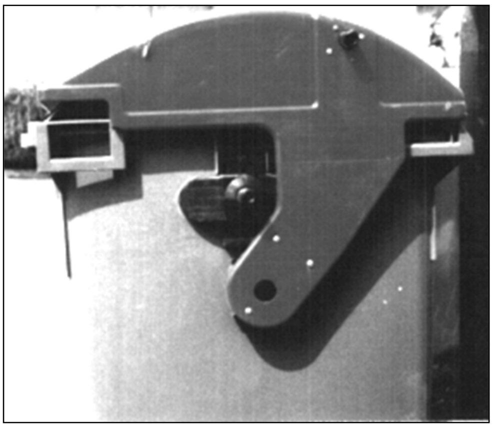
Ohne Beweis sei der ***Fundamentalsatz der ebenen Kinematik*** angegeben:

> **Satz 6.1:** Irgend zwei Lagen eines bewegten ebenen Systems (z.B. Original, Kopie) können stets durch eine Drehung (im Grenzfall durch eine Schiebung) auseinander hervorgehen.

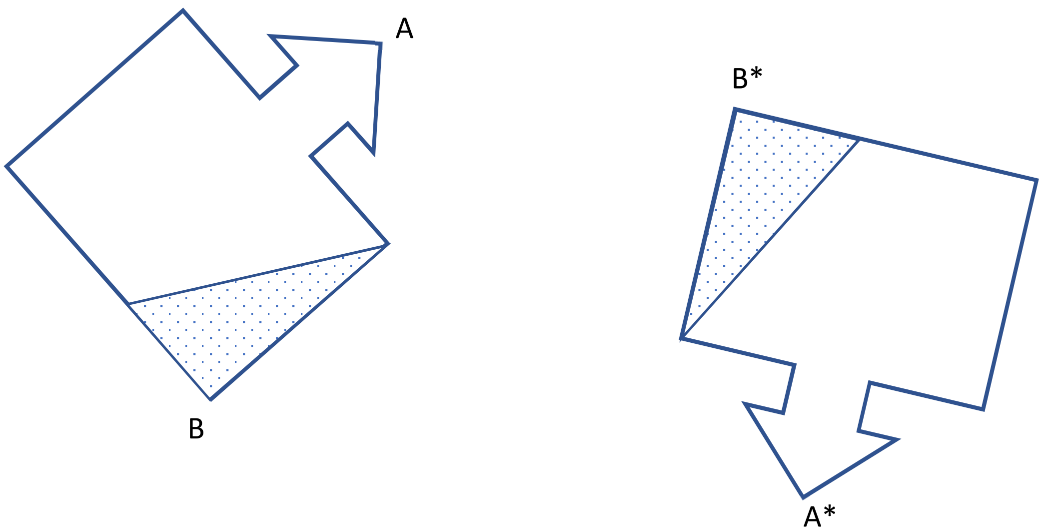
Anwendung:

Geöffnete und geschlossene Lage eines Papiercontainers.
Durch den Hauptsatz ist gewährleistet, dass es eine Drehung gibt, sodass eine Lage in die andere übergeführt werden kann.





Aufgabe 6.5: Finden Sie das Drehzentrum, welche die Figur AB… in die Figur A*B* … überführt.

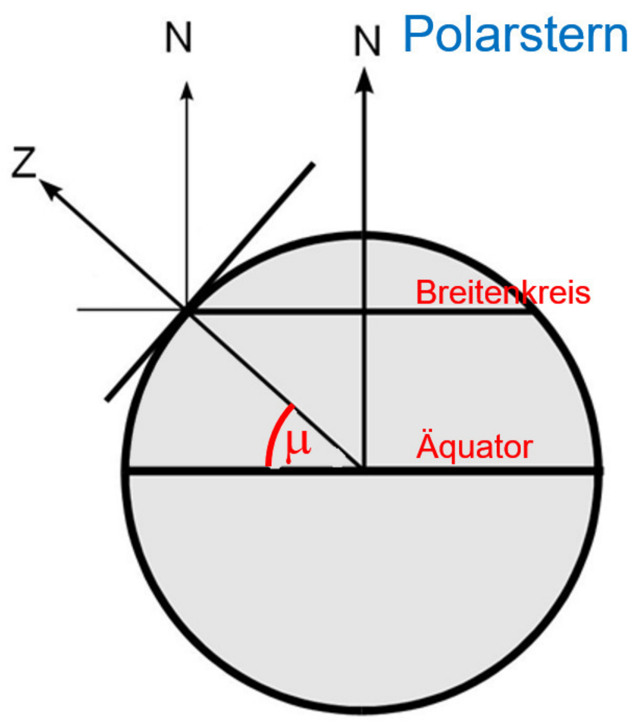


„Geometrie = Erdmessung"

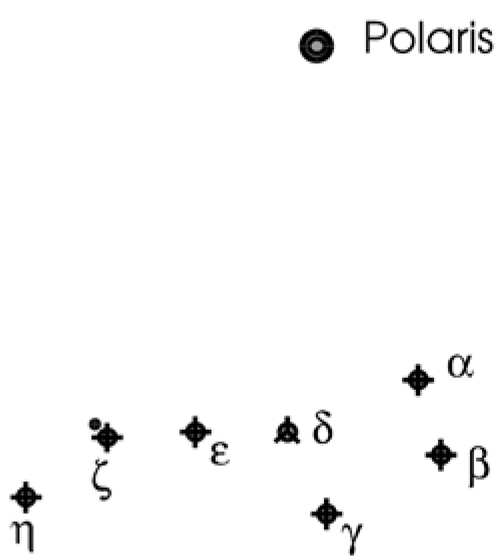
Wie kann die geografische Breite eines Standorts bestimmt werden?

Satz 6.2: Die geografische Breite eines Punktes auf der Erdoberfläche stimmt mit dem Höhenwinkel des Polarsterns überein.

Beweis:



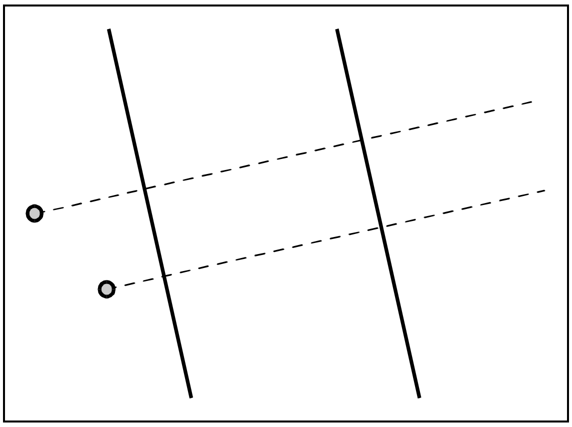
Wie findet man den Polarstern?



Verknüpfung ebener Abbildungen – Beispiele

Bei den diversen CAD-Programmen ist es kein Problem, eine gewählte Abbildung auch auf die Bildfigur anzuwenden, auf diese wieder usf. Diese **Hintereinanderausführung der Abbildungen** heißt auch **Verknüpfung der Abbildungen.**

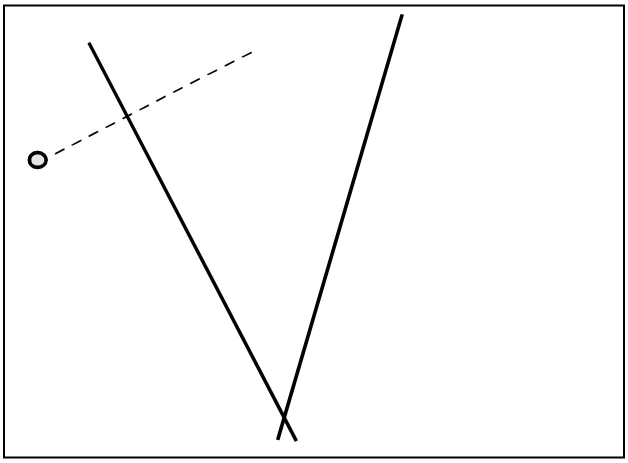
$S_g \circ S_h$ [g parallel zu h]



Satz 6.3: Durch die Hintereinanderausführung zweier Axialspiegelungen mit parallelen Achsen wird eine **Schiebung** festgelegt. Alle Schiebungspfeile sind zueinander parallel (normal zu den beiden Spiegelachsen), gleich lang (doppelt so lang wie der Abstand der beiden Spiegelachsen ist) und gleich orientiert.

PP“ =

$S_g \circ S_h$ [g nicht zu h parallel]



Satz 6.4: Die Hintereinanderausführung zweier Axialspiegelungen mit schneidenden Achsen kann durch eine **Drehung** ersetzt werden. Das Drehzentrum ist der Schnittpunkt S, der Drehwinkel ist doppelt so groß wie der von den Spiegelachsen eingeschlossene Winkel.

Diese Verknüpfung von Abbildungen stellt einen **anderen Zugang zur Definition der Kongruenz** dar:

Def. 6.9: Zwei Figuren F und F' heißen **kongruent**, wenn F' das Bild von F bezüglich einer Axialspiegelung oder einer Verknüpfung endlich vieler Geradenspiegelungen ist.

Die Art und Zahl der anzuwendenden Abbildungen, um von F zu F' zu gelangen, ist nicht eindeutig.

Bandornamente

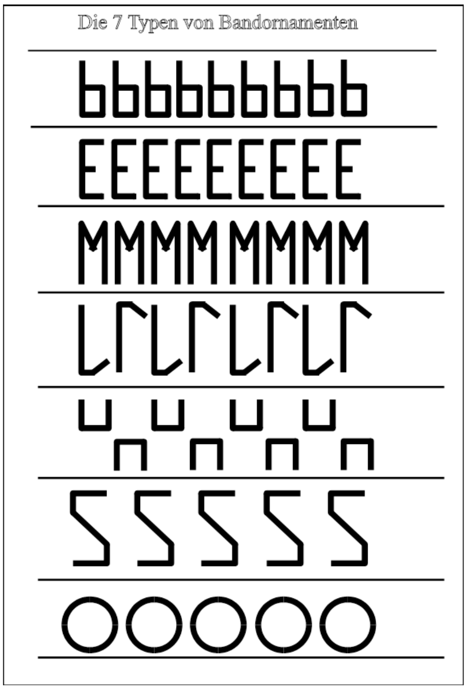
Unter einem Band-oder Streifenornament versteht man Figuren, die entstehen, **wenn ein Motiv innerhalb eines Streifens nach beiden Seiten mit jeweils festem Abstand periodisch wiederholt wird.** Da solche Ornamente in der Kunst vieler Kulturkreise (Stickereien, Tapetenmuster, Flechtmuster, Muster bei Töpferwaren schon bei prähistorischen Kulturen) auftreten, lohnt sich eine nähere Beschäftigung. Es zeigt sich nämlich, dass es lediglich sieben Typen solcher Bandornamente geben kann (ohne Beweis). Dies nützen Archäologen, um Funde mit Bandornamenten (hauptsächlich Töpferwaren, vgl. Foto eine Vase aus dem Libanon) näher zu beschreiben.

>>> Internetrecherche: „Bandornamente Archäologie“, „Friesgruppe“

Die sieben Typen entstehen, wenn man jene Abbildungen sucht, die das (unendlich lange gedachte) Band in sich transformieren, für welche also das Ornament eine **Fixfigur** ist.

Aufgabe 6.6: Scheiben Sie zu jedem Bandornament in der untenstehenden Abbildung alle aufgelisteten Kongruenzabbildungen, die das Ornament als Ganzes unverändert lassen. Heben Sie die jeweilige Fixfigur hervor.

T... Translation
Sh... Axialspiegelung um eine horizontale Achse
Sv... Axialspiegelung um eine vertikale Achse
P... Punktspiegelung (= Drehung um 180°)
G... Gleitspiegelung (Schiebung o Axialspiegelung)



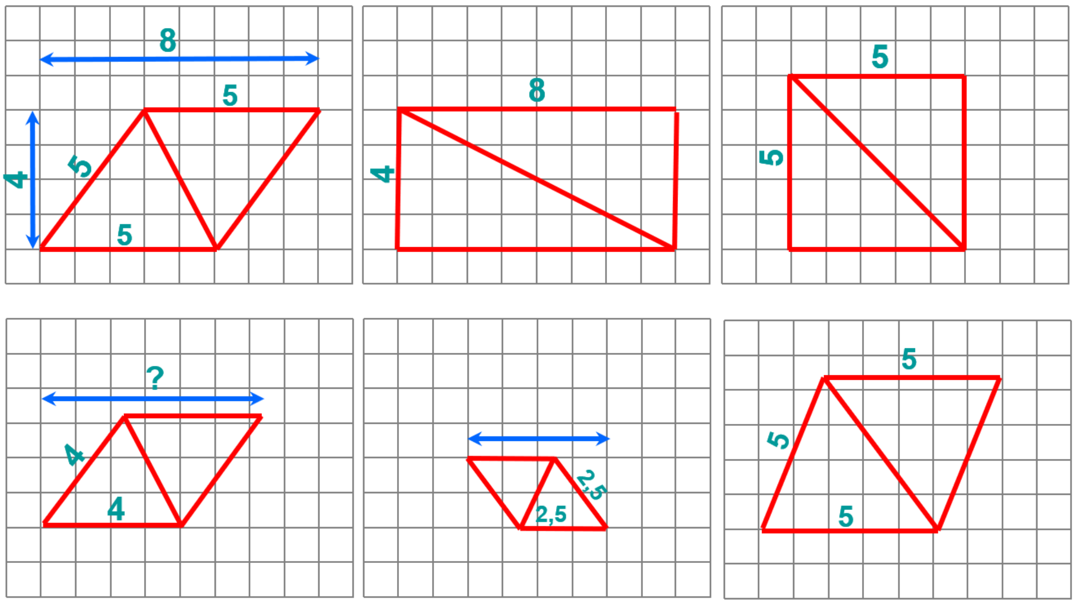
6.2 Ähnlichkeitsbegriff

Unterrichtskonzept 1: Strahlensätze/Teilung von Strecken bzw. Streckenverhältnisse → math. Ähnlichkeitsbegriff (→ Zentrische Streckung (Herstellung ähnlicher Figuren))

Unterrichtskonzept 2: Math. Ähnlichkeitsbegriff (Ähnliche Dreiecke/ähnliche Figuren erkennen) → Strahlensätze/Teilung von Strecken/Streckenverhältnisse (→ Zentrische Streckung/Herstellung ähnlicher Figuren)

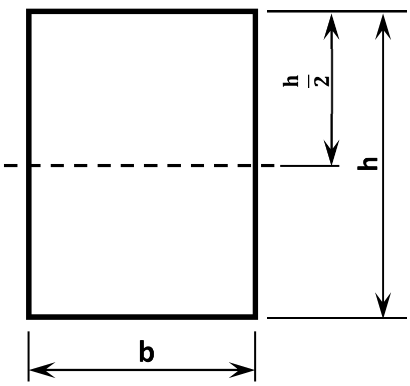
Ähnlichkeit, Vorgangsweise nach Konzept 2:

„ähnlich“ umgangssprachlich: Übereinstimmung in bestimmten Merkmalen, gleichartig sein
„ähnlich“ in mathematischer Fachsprache könnte anhand von Beispielen vorbereitet werden, z.B. welche der folgenden Figuren umgangssprachlich bzw. mathematisch ähnlich sind.



Def. 6.10: Zwei ebene Figuren heißen **(zueinander) ähnlich**, wenn entsprechende Seitenlängen (zu einander) im selben Verhältnis stehen und entsprechende Winkel gleich groß sind.

Aufgabe 6.7: Ein Blatt Papier soll die Eigenschaft haben, dass die zwei Teile nach dem Halbieren ähnlich zum Ausgangsblatt sind (also dasselbe Seitenverhältnis und Winkel haben). Berechnen Sie Breite b und Höhe h des Ausgangsblattes.



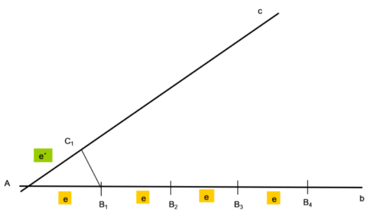
$$b : h = \frac{h}{2} : b$$

Übung: Das Blatt Papier soll 1 m² Fläche haben („DIN A0“). Wie groß sind die Seitenlängen?

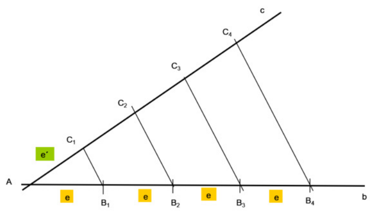
Strahlensätze

Hinweis: kommen in neu konzipierten Unterrichtswerken der Sek I, z.B. „100 % Mathematik 3" (ÖBV) oder "Genial! Mathematik 3" (LEMBERGER) nicht mehr vor. An sich entspricht dies dem Wortlaut des Lehrplans: Die traditionellen Anwendungen bei Streckenteilungen werden in diesem Fall über Ähnlichkeitseigenschaften begründet.

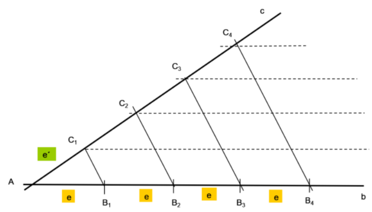
1. **Strahlensatz**, mögliche konstruktive schrittweise Vorgangsweise**:**



Schritt 1

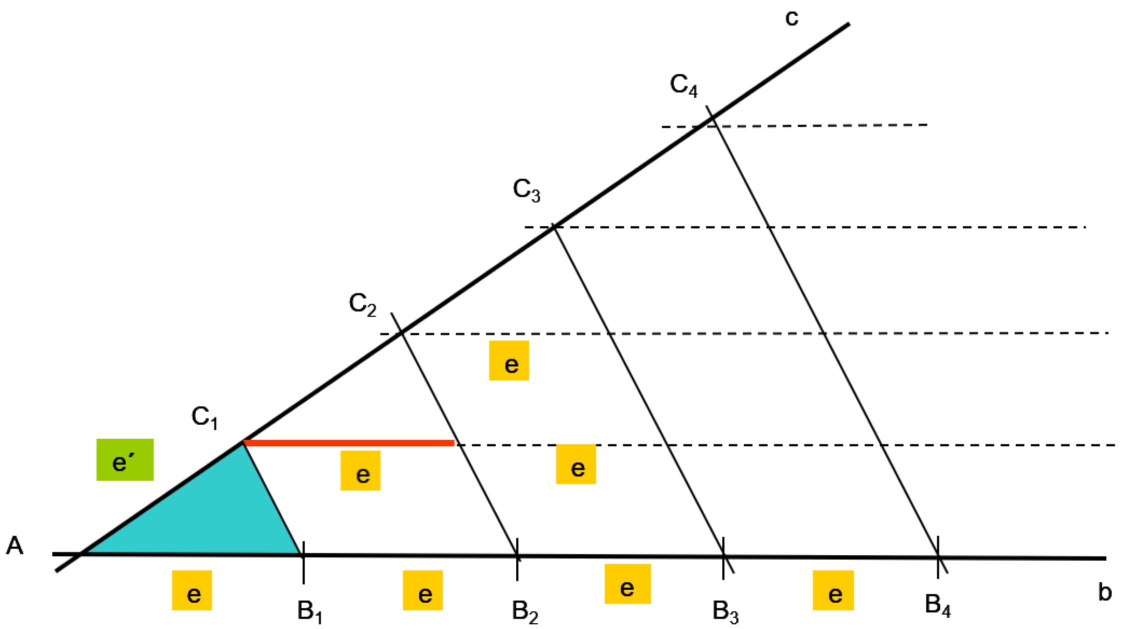


Schritt 2



Schritt 3

Schritt 4:



Schritt 5: Kongruente Dreiecke finden

Begründung WSW-Satz → gleiche Längen von C_iC_{i+1} mit AC_1

Schritt 6: Es gilt: $AB_i = i.e$ und $AC_i = i.e'$

Weiters erkennt man:

$$AB_i : AB_j = i.e : j.e = i : j = i.e' : \ \ldots$$

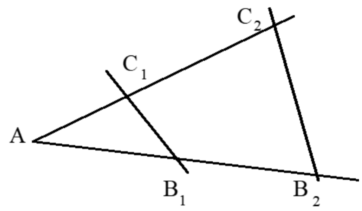
Die Verhältnisse entsprechender (durch die Parallelen ausgeschnittenen) Streckenabschnitte auf beiden Strahlen verhalten sich gleich (natürlich auch, wenn die Streckenabschnitte nicht von A ausgeben).

Dies führt zum

Satz 6.5 (1. Strahlensatz): Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Längen entsprechender Abschnitte auf beiden Strahlen gleich.

*Gilt auch die **Umkehrung des ersten Strahlensatzes**?*
Wenn sich die Abschnitte auf beiden Strahlen (scheidenden Geraden) gleich verhalten, dann sind die Geraden B_iC_i zueinander parallel.

Beweis (indirekt):
Nehmen wir das Gegenteil an, d.h. Verhältnis sei gleich $AB_1 : AB_2 = AC_1 : AC_2$ und B_iC_i sei **nicht** parallel:



Auf die Strecken AC_1, AC, AB_1, AB_2 kann nun wegen der Parallelität der erste Strahlensatz angewendet werden, und es gilt:

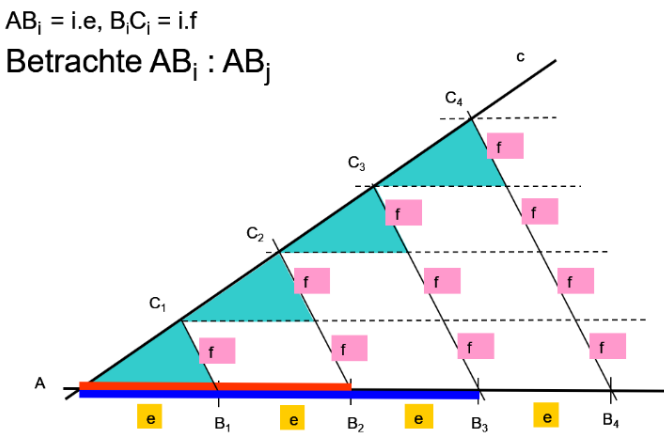
$$AC_1 : AC = AB_1 : AB_2 =$$

Insgesamt folgt daraus die Streckengleichheit von AC_2 und AC und daraus die Gleichheit von C und C_2.

2. Strahlensatz, abgeleitet nach derselben Figur**:**

Das in Schritt 6 auftretende Verhältnis kann auch auf andere Weise umgeformt werden:

$AB_i : AB_j = i.e : j.e = i : j = i.f : \ldots$

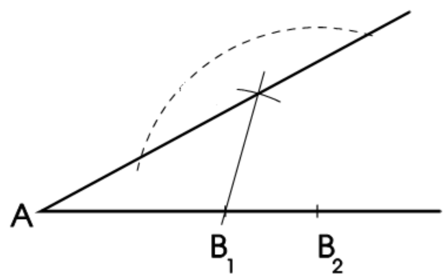


Es ergibt sich der

Satz 6.6 (**2. Strahlensatz**): Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich gleich wie die Abschnitte auf den Strahlen vom Anfangspunkt A aus gemessen**.**

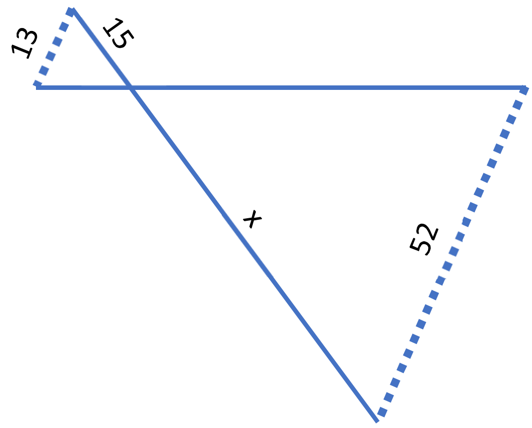
*Gilt auch von diesem Satz die **Umkehrung**?*

Das Verhältnis sei gleich,
müssen dann auch die Strahlen parallel sein?
z.B. sei $AB_1 : AB_2 = 2 : 3 = B_1C_1 : B_2C_2$
Frage: Ist B_1C_1 parallel zu B_2C_2?



Anwendung bei Berechnungen und Teilungen

Aufgabe 6.8: x ist zu berechnen (Die punktierten Strecken sind zu einander parallel.)



Beachte:

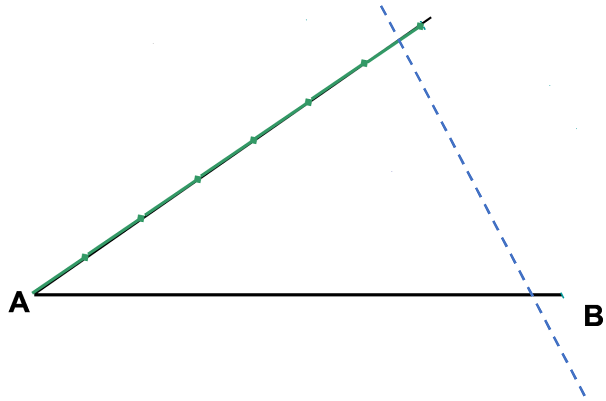
Lösung unter Anwendung der Ähnlichkeit: x : 52 =

Lösung unter Anwendung des 2. Strahlensatzes: x : 15 =

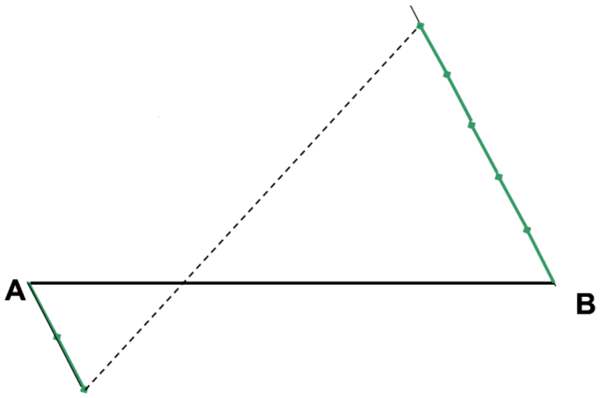
Innere und äußere Teilung einer Strecke

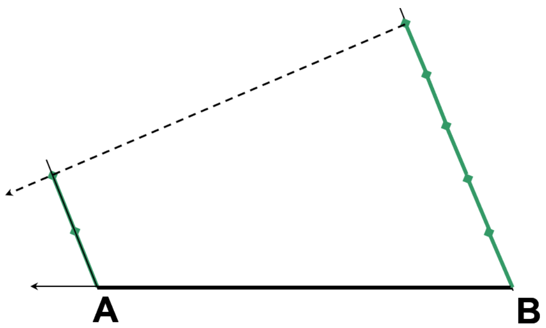
Aufgabe 6.9: Eine Strecke AB soll durch einen Punkt in einem bestimmten Verhältnis (2: 5) geteilt werden

Methode 1:



Methode 2:





Innerer und äußerer Teilungspunkt für zur **harmonischen Teilung** einer Strecke.

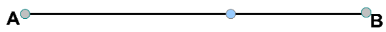
Goldener Schnitt, sectio aurea

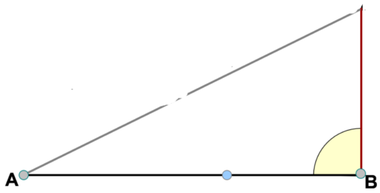
Aufgabe 6.10: Eine Strecke AB soll so geteilt werden, dass sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt gleich verhält wie der größere zum kleineren.

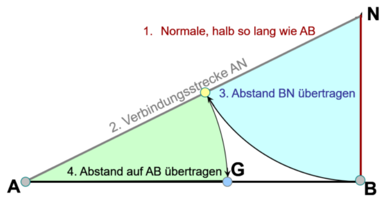
Es soll also gelten: AB : AG = AG : GB

oder

$a : x = x : y$ (mit $y = a-x$)







Nach der Definition:

$$a : x = x : (a - x)$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$\rightarrow \quad x =$$

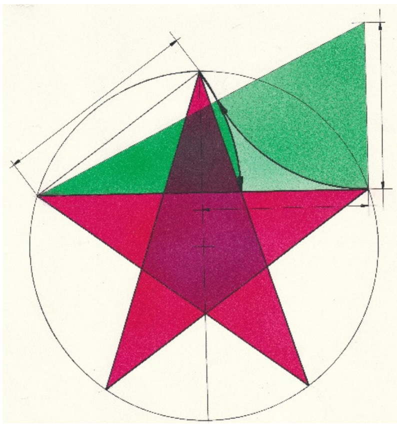
Nach der Konstruktion:

$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$$

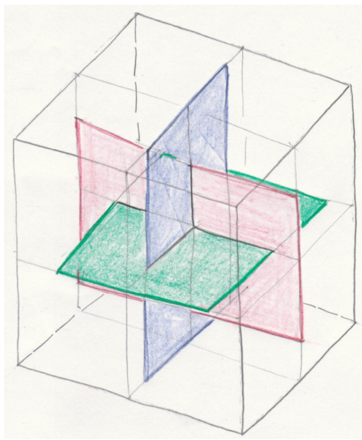
$$\rightarrow \quad x =$$

Anwendungen: Architektur, Kunst, Raumgeometrie, Natur, …

New York: UNO-Headquarter



Pentagramm



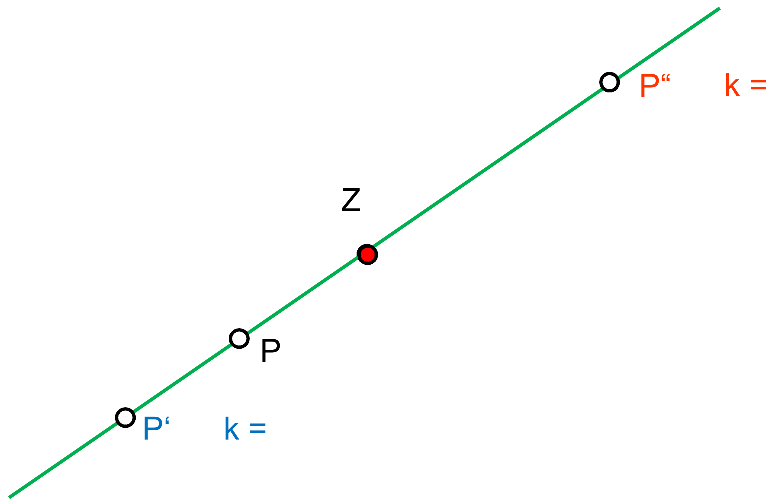
Eckpunkte eines Ikosaeders

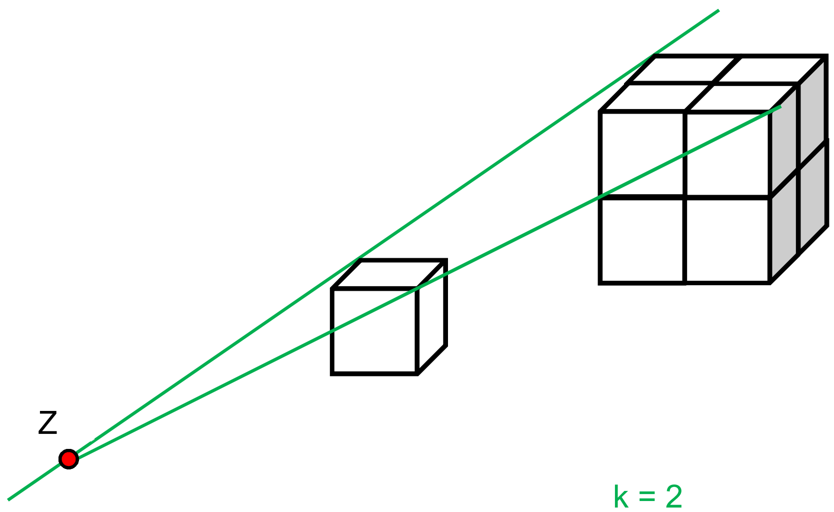
6.3 Zentrische Streckung

Def. 6.11: Unter **zentrischer Streckung** versteht man eine Abbildung (in der Ebene oder im Raum), die jedem Punkt P einen Punkt P‘ nach folgender Vorschrift zuordnet:

- Z, P und P‘ liegen auf einer Geraden.
- P‘ liegt k-mal so weit von Z entfernt wie P: ZP‘ = k·ZP
- Ist k >0 so liegen P und P‘ auf derselben Seite von Z, bei k<0 auf verschiedenen Seiten

k … Streckfaktor, manchmal auch „Abbildungsmaßstab“





k = 2

Obf : Obf‘ = 1 :

Vol : Vol‘ = 1 :

7. Ortslinien, Kegelschnitte und Spurkurven

Eine „neue" Sichtweise …

Fachmathematik-Fulmek-Skriptum: „Kegelschnitte" (p 52ff, p 103f, p 170f)
Internetsuchtipps: conics, Kegelschnitte, Ortslinien Mathe, Spurkurve versus Ortslinie
GZ Sek I: Ellipse: Anschauliche Erzeugung; Eigenschaften; Anwendungen.
Lehrplan 3., 4. Klasse Sek I: Auftreten als Funktionsgraphen ($y = x^2$, $y = 1/x$), Zeichnen im DGS
Lehrplan 7. Klasse Sek II: Nichtlineare analytische Geometrie - Beschreiben von Kreisen, … Kegelschnittslinien durch Gleichungen - Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten
Schulanwendung im Verständnis dieser Kurven und deren Bedeutung in Physik und Technik

Def. 7.1: Unter **geometrischem Ort** versteht man eine Menge von Punkten, die eine bestimmte gemeinsame Eigenschaft erfüllen.

Beispiele:
Menge aller Punkte der Zeichenebene, die genau als 5 cm von einem Punkt M entfernt sind.

$\{ X \in \Pi \mid |XM| = 5 \}$ …. Kreislinie, Kreis als Ortslinie

Menge aller Punkte der Zeichenebene, die weniger als 5 cm von einem Punkt M entfernt sind.

$\{ X \in \Pi \mid |XM| < 5 \}$ …. Offene Kreisscheibe

Menge aller Punkte des R^3, die genau als 5 cm von einem Punkt M entfernt sind.

$\{ X \in R^3 \mid |XM| = 5 \}$ …. Kugelfläche, Ortsfläche

Menge aller Punkte, die von einer Geraden g konstanten Abstand haben.

$\{ X \in \Pi \mid |Xg| = 3 \}$ …. Parallelenpaar, Ortslinie

$\{ X \in R^3 \mid |Xg| = 3 \}$ …. Drehzylinderfläche, Ortsfläche

Ortslinien = spezieller geometrischer Ort

In früheren Mathematiklehrplänen war im Gegensatz zu den aktuellen Vorgaben der Begriff „Ortslinie“ fest verankert und umfasste neben Geraden und Kreisen auch die Kegelschnitte: *„Konstruktion nur auf Grund der Brennpunktsdefinition“* hieß es beispielsweise im Lehrplan AHS 4. Klasse, 1974)

Im aktuellen Unterrichtskonzept kann die Visualisierung von Ortslinien durch die Stärken der Technologie (DGS) durch **Zug- und Spurmodus** sinnvoll realisiert werden. Durch die *Idee der Dynamik* können bekannte Grundelemente wie Gerade und Kreis unter neuem Licht gesehen werden und neue Elemente (wie die Kegelschnittslinien) den geometrischen Formenschatz in spielerisch-aktiver und forschend-experimenteller Weise erweitern. Dazu gibt der Lehrplan in den didaktischen Grundsätzen (Sek 1) ausreichend legistischen Rückhalt:

… aus den didaktischen Grundsätzen, SEK I

Systematisches und situationsbezogenes Lernen, verständnisvolles Lernen:

…

Die Schülerinnen und Schüler sind … Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen, Reflektieren.
Mathematische Begriffe und Verfahren werden durch die eigenen Aktivitäten von den Schülerinnen und Schülern in ihr Wissenssystem eingebaut. …

Lesen mathematischer Texte, Fachsprache:
Ab der 1. Klasse ist darauf Bedacht zu nehmen, dass die Schülerinnen und Schüler sich mit Mathematik auch in Textform auseinander setzen (zB selbstständiges Erarbeiten aus Musterbeispielen und Erklärungstexten).

Voraussetzung für grundlegendes Verständnis der Entstehung bestimmter mathematischer Objekte

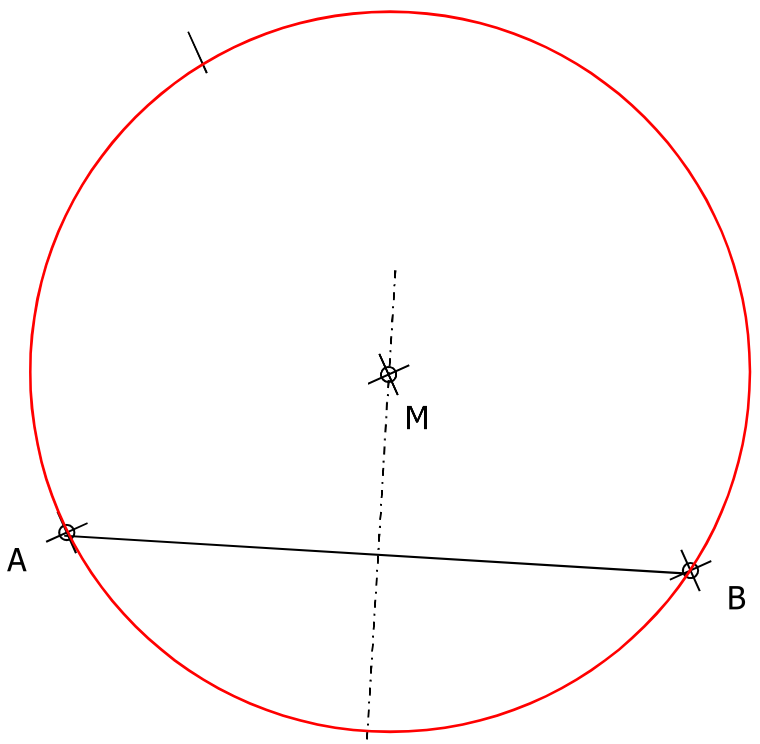
Geläufigkeit im Umgang mit Ortslinien ist die Voraussetzung für

- grundlegendes Verständnis der Entstehung bestimmter mathematischer Objekte
- Erstellung von Parameterdarstellungen von Kurven und Flächen
- Verständnis der Erzeugung von Spurkurven mit Hilfe von DGS

7.1 Der Kreis als Ortslinie, Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel

Satz 7.1: Die über einer Sehne liegenden **Peripheriewinkel** eines Kreises sind untereinander gleich und **halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel**.

Konstruktion eines Kreises mit Sehne A und B. Untersuche die Beziehung der Kreispunkte zur Strecke AB. (→ Ortsbogen, Peripheriewinkel, Zentriwinkel)

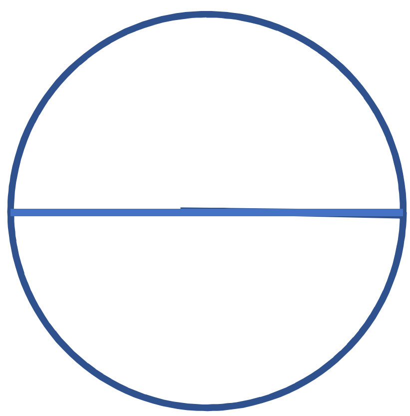


Beweisanleitung: Es gibt drei gleichschenkelige Dreiecke, die alle den Eckpunkt M haben.
Betrachte die Summe der drei Winkel in M und setze sie mit den Winkeln in den drei Eckpunkten in Beziehung.
Bestimme zuerst die Basiswinkel im Dreieck ABM, wenn der Zentriwinkel 2ϕ ist.
Die Ergänzungswinkel in A und B seien α und β. Berechne den Peripheriewinkel.

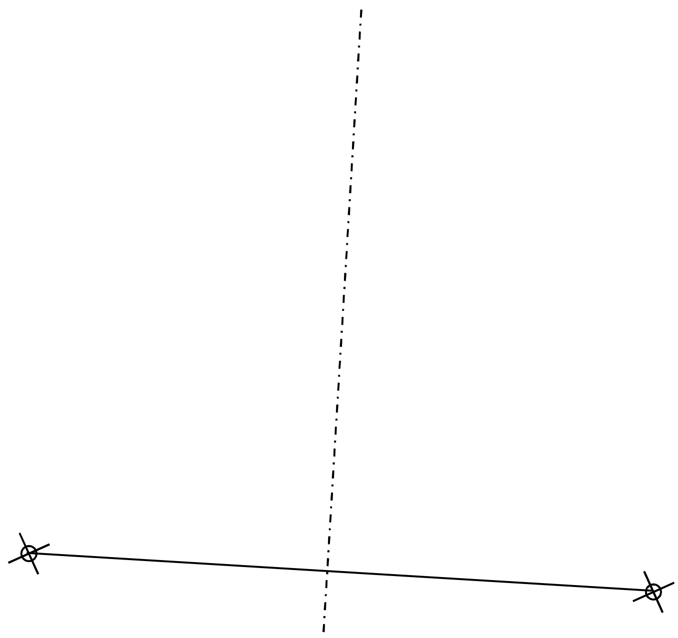
Hinweis: Peripheriewinkel, die auf verschiedenen Seiten derselben Sehne eines Kreises liegen, ergänzen einander auf 180°. (Beweis: Übungen)

Sonderfall: $\varphi = 90°$ Satz von THALES (Milet, um 600 v. Chr.)

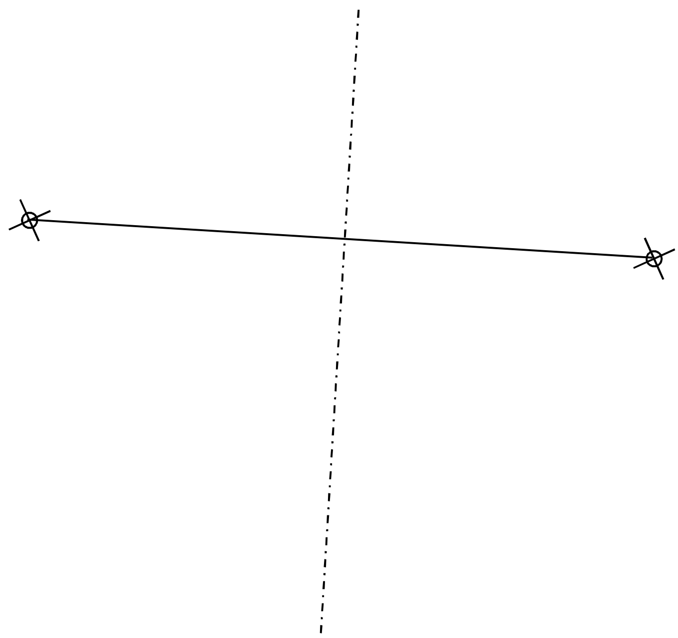
Satz 7.2: Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisdurchmesser ist 90°.



Aufgabe 7.1a: Gegeben sind eine Strecke AB und ein Winkel φ (= 55°). Zu konstruieren ist die Menge aller Punkte, von denen aus eine Strecke AB unter diesem Winkel φ erscheint.



Aufgabe 7.1b: Gegeben sind eine Strecke AB und ein Winkel φ (= 130°). Zu konstruieren ist die Menge aller Punkte, von denen aus eine Strecke AB unter diesem Winkel φ erscheint.



Historische Anwendung: Navigationsaufgaben

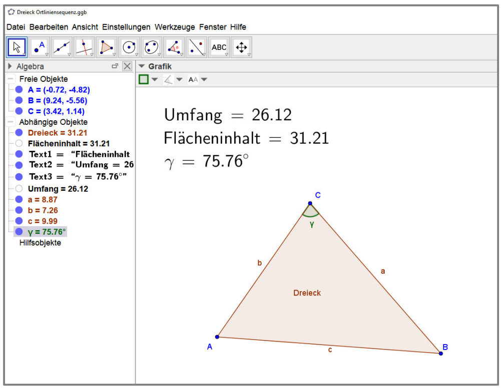
7.2 Die Ellipse

Mögliche Einstiegssequenz

… entdeckend-forschendes Lernen …

Schritt 1:

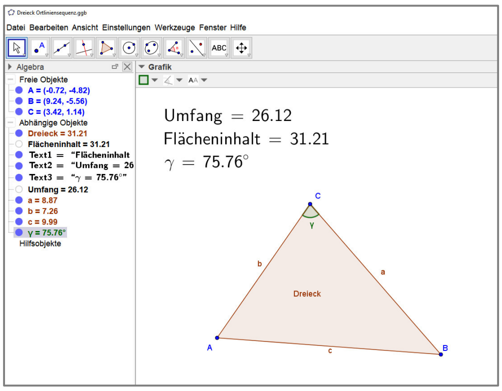
DGS: Gegeben sei ein Dreieck ABC, zeige den Wert des Flächeninhalts an. Bewege den Punkt C so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks (möglichst) gleich groß bleibt.



$$A = \frac{c}{2} \cdot h_c$$

Schritt 2:

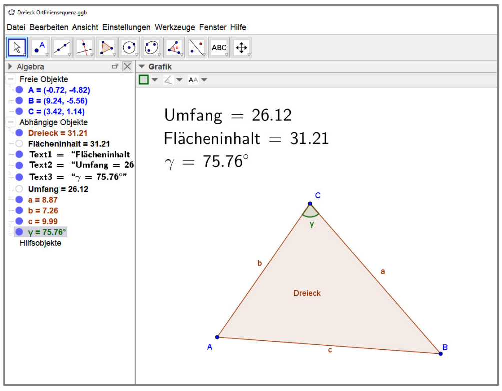
DGS: Gegeben sei ein Dreieck ABC, zeige den Wert des Winkels γ (<ACB) an. Bewege den Punkt C so, dass der Winkel des Dreiecks (möglichst) gleich groß bleibt.



|<AXB|

Schritt 3:

DGS: Gegeben sei ein Dreieck ABC, zeige den Wert des Umfangs u an. Bewege den Punkt C so, dass der Umfang des Dreiecks (möglichst) gleich groß bleibt.

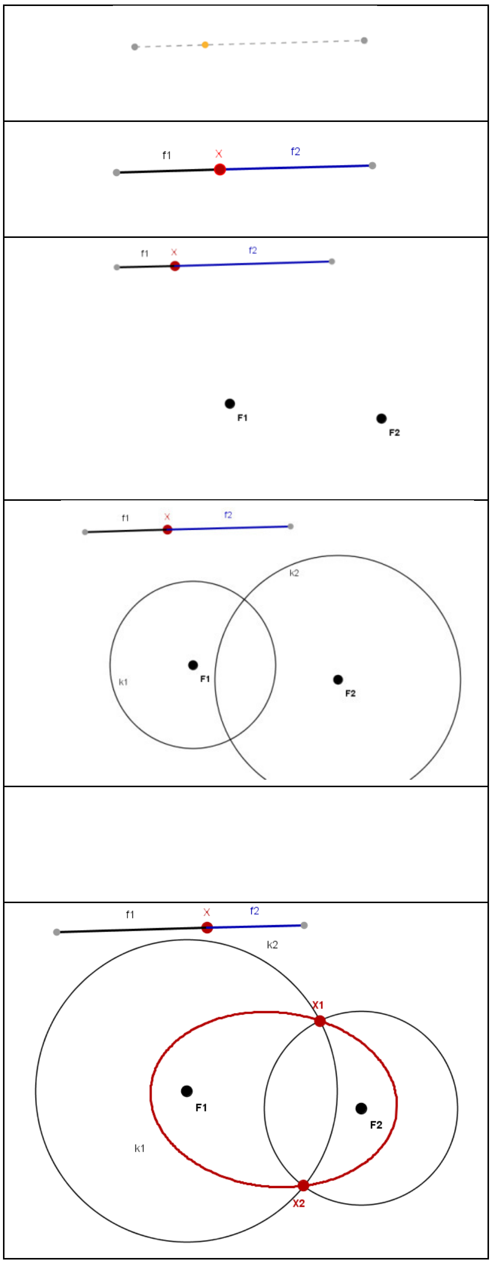


|AX| + |BX|

Klassische Definition mit Brennpunkten

Def. 7.2: Eine **Ellipse** ist die Menge jener Punkte der Zeichenebene, für welche die Summe der Entfernungen zu zwei gegebenen Punkten konstant ist.

APOLLONIUS von PERGA (Kleinasien, um 200 v. Chr.)



Bemerkung: Das Beispiel des Umsetzens der Brennpunktkonstruktion mittels DGS scheint wieder in das Bild zu passen, zunächst „Altes" mit Hilfe „neuer Technologien" umzusetzen anstatt gänzlich neue Umsetzungen zu suchen.

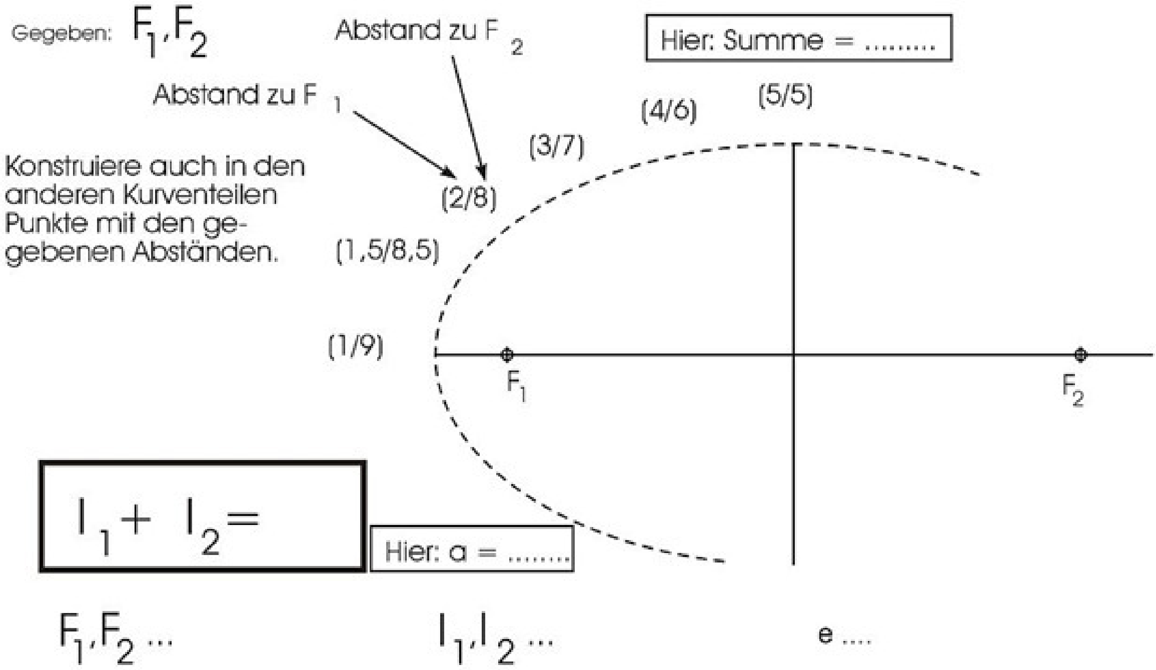
Ein Vergleich aus dem Transportwesen sei hier gestattet: Das alte Wandbild „Die erste deutsche Eisenbahn" zeigt sehr deutlich eine Facette der Technologieablösung:

Alte Mechanismen in neuen Technologien**:** Alte Schulwandtafel aus dem Verlag A. Pichlers Witwe und Sohn, Wien.

So wie die neue Technologie „Dampfeisenbahn" anfangs noch den Beruf des Pferdekutschers (als Bremser) übernommen hat (vgl. Abbildung, runde Markierungen!), so scheinen beim Einsatz neuer Medien im Unterrichtswesen alte liebgewordene Gewohnheiten mit übernommen zu werden, von denen man erst nach praktischer Erprobung bemerkt, dass sie obsolet geworden sind. Exemplarisch sei dafür aus dem Schulbereich die Unterrichtsform des Frontalunterrichts angeführt, wenn in einem EDV-Raum zum Beispiel reine Recherchen aus dem Internet durchgeführt werden sollen.

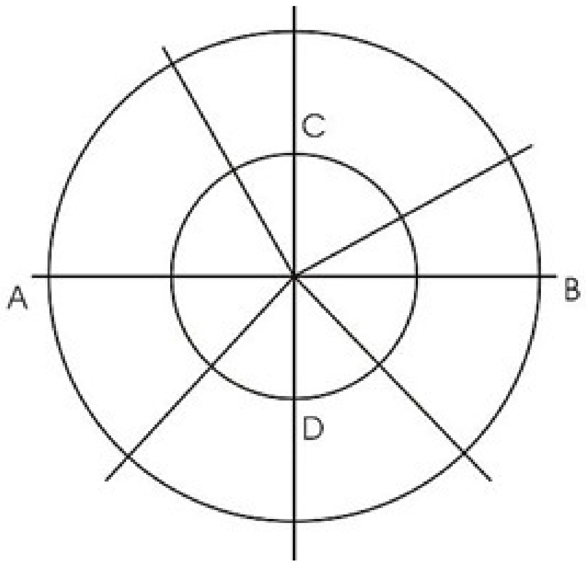
Gärtnerkonstruktion (Brennpunktkonstruktion)

Skizze: verkleinert

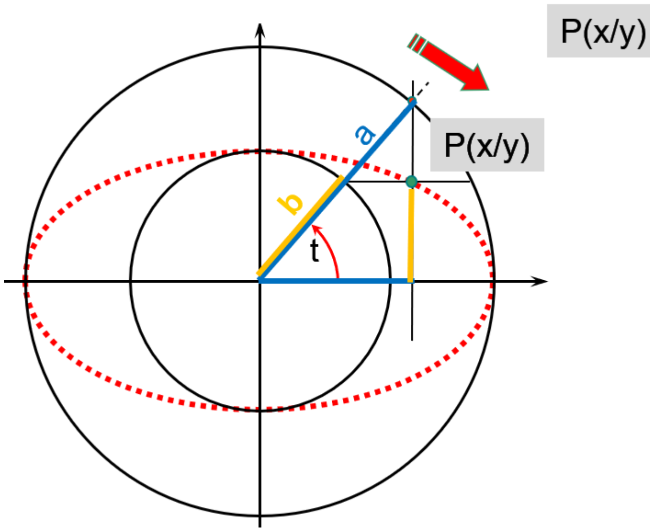


Scheitelkreiskonstruktion (Zweikreiskonstruktion)

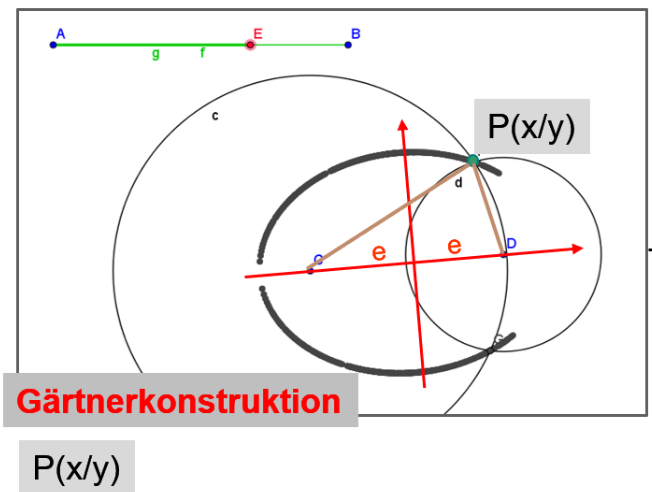
Ideal für DGS-Anwendung

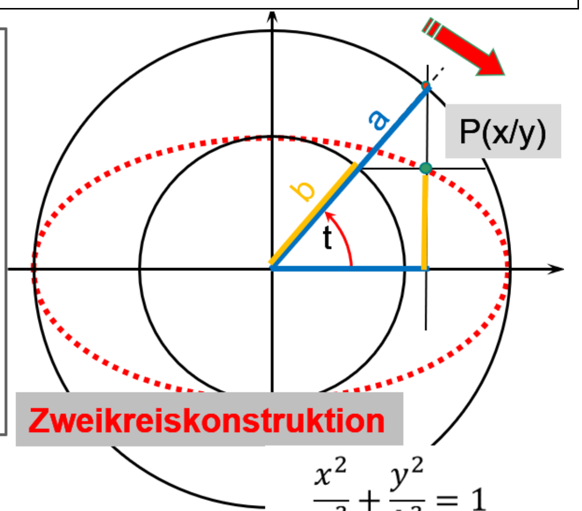


Herleitung der Kurvengleichung



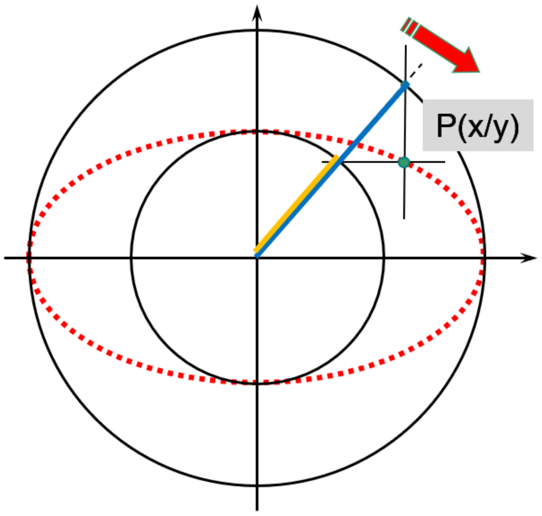
Satz 7.3: Gärtnerkonstruktion und Zweikreiskonstruktion führen zu selben Kurve.





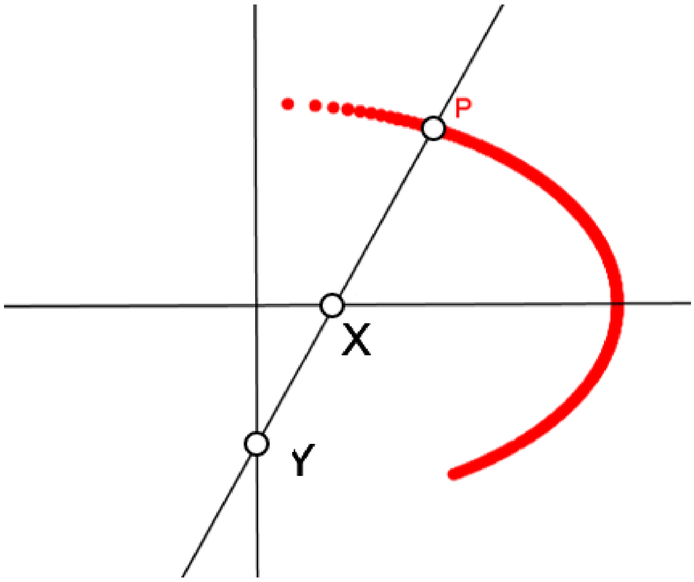
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Papierstreifenkonstruktion

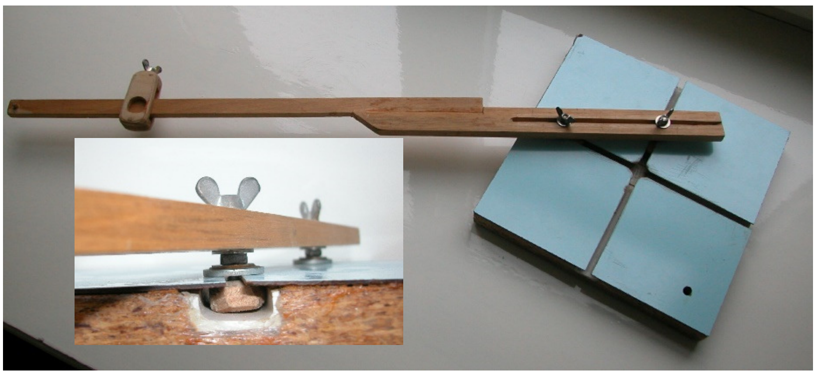


Exkurs in die ebene Kinematik

Bei einer ebenen Bewegung gehen alle Bahnnormalen in jedem Augenblick immer durch denselben Punkt (= „Momentanpol“) (ohne Bew.).



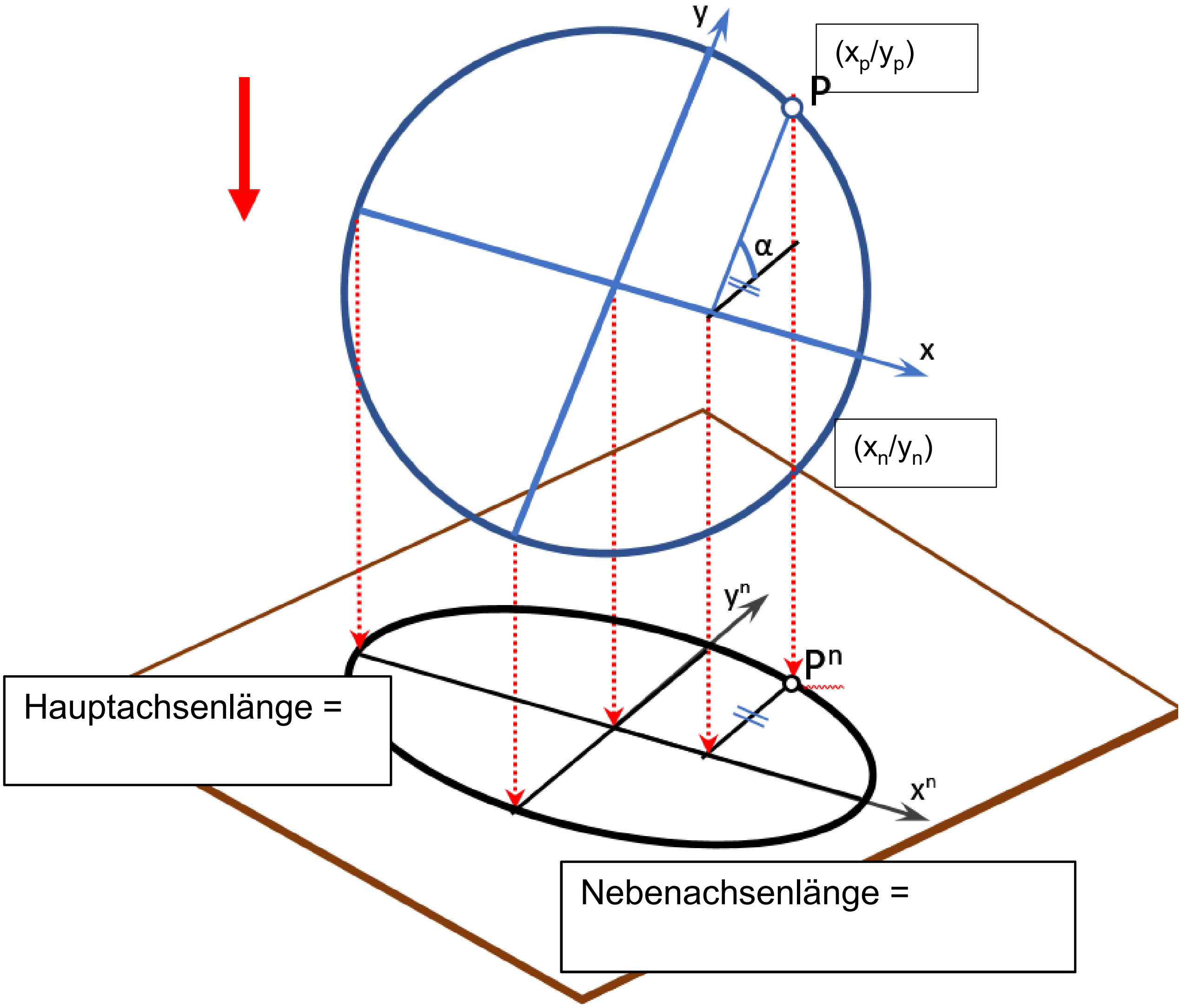
Anwendung der Papierstreifenkonstruktion: Ellipsenzirkel



Die Ellipse als Kreisbild (Normalprojektion)

Satz 7.4: Der **Normalriss eines Kreises** ist eine Ellipse, die Hauptachsenlänge ist gleich dem Kreisdurchmesser.

Begründung:

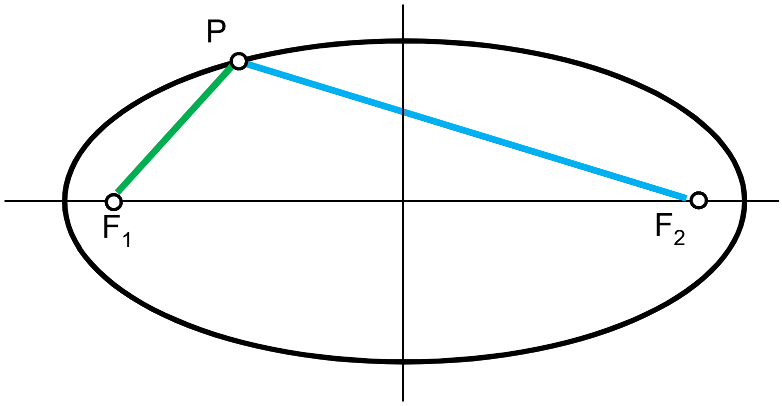


Auch in Zentralprojektion kann das Kreisbild eine Ellipse sein (allerdings auch eine Parabel oder Hyperbel).

Vgl. Foto vom Mittelkreis in einem Turnsaal:

Konstruktive Ergänzungen

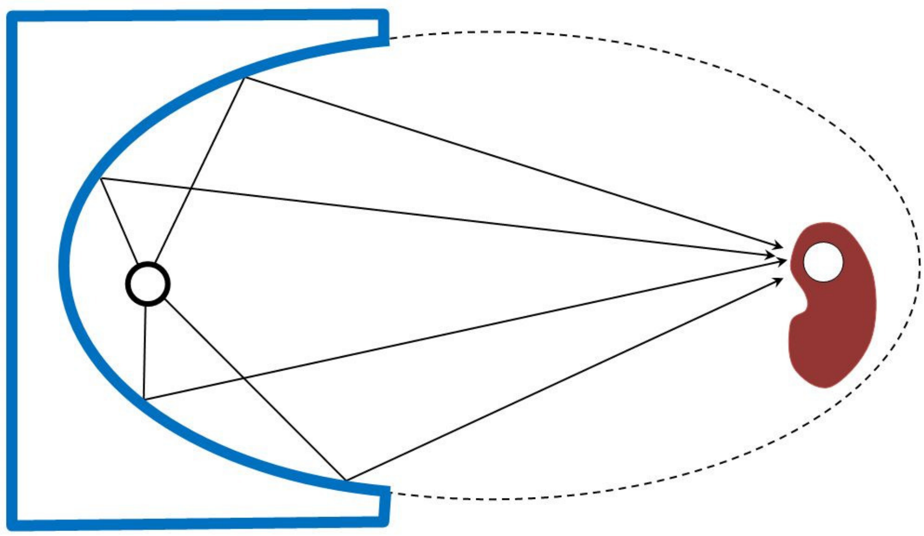
Tangentenkonstruktion



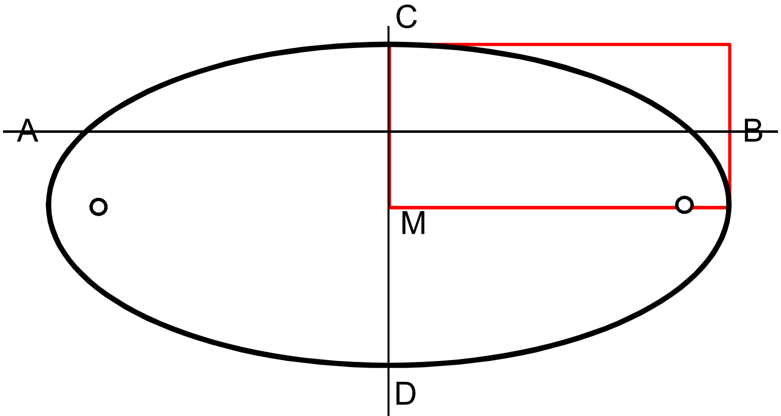
Anwendungen dieser Konstruktion

Flüstergewölbe

Nierensteinzertrümmerer (Lithotripter)

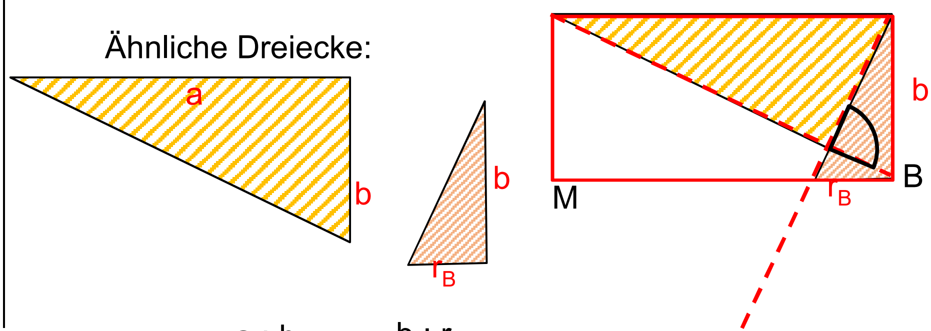


Scheitelkrümmungskreise (Scheitelschmiegungskreise)



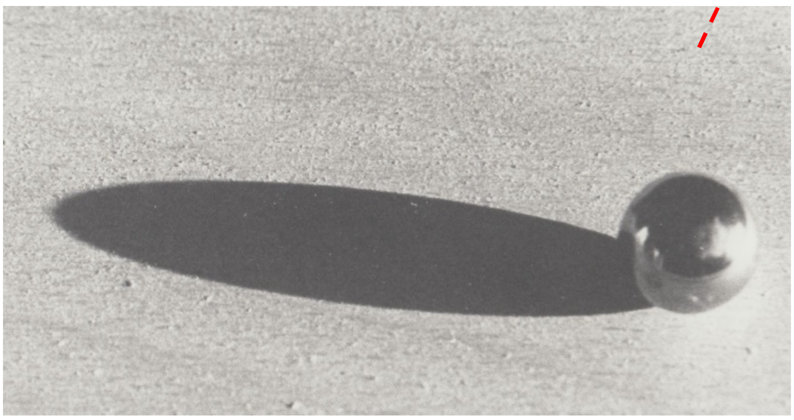
Berechnung der Radien:

Ähnliche Dreiecke:



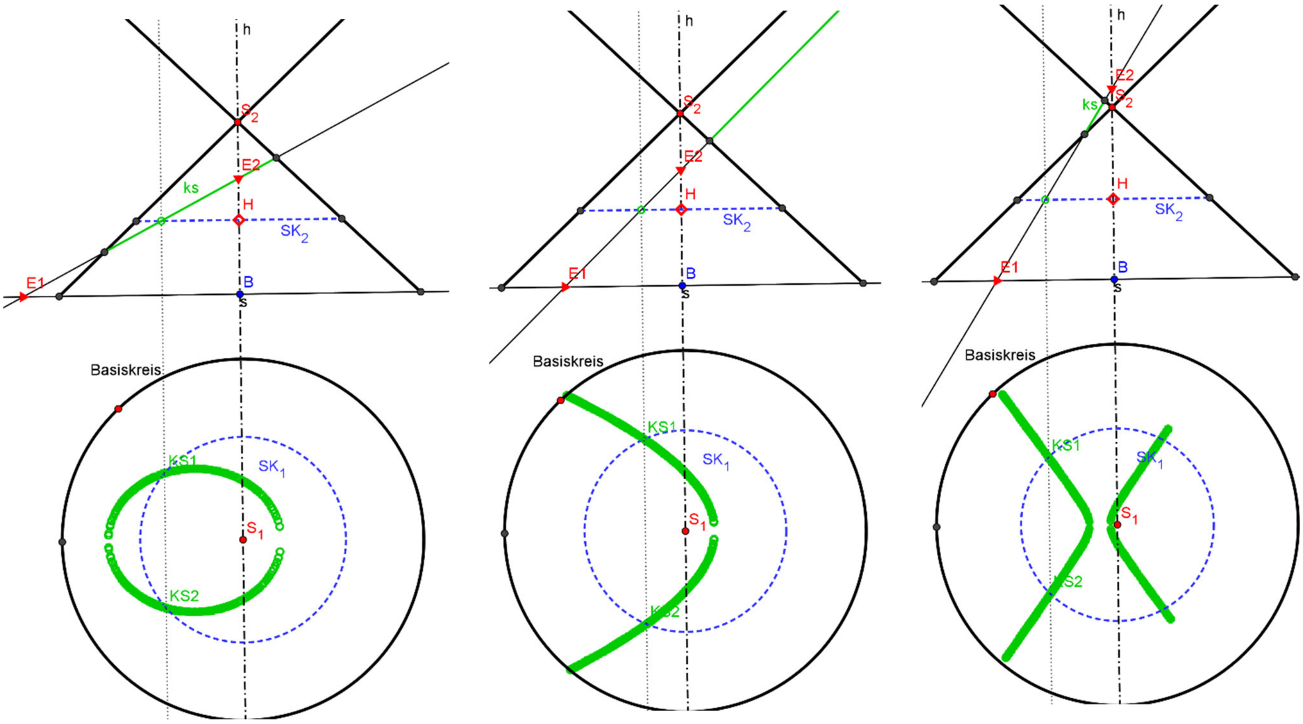
$$a : b = b : r_B$$

Ellipsen als Schatten von Kugeln bei Parallelbeleuchtung

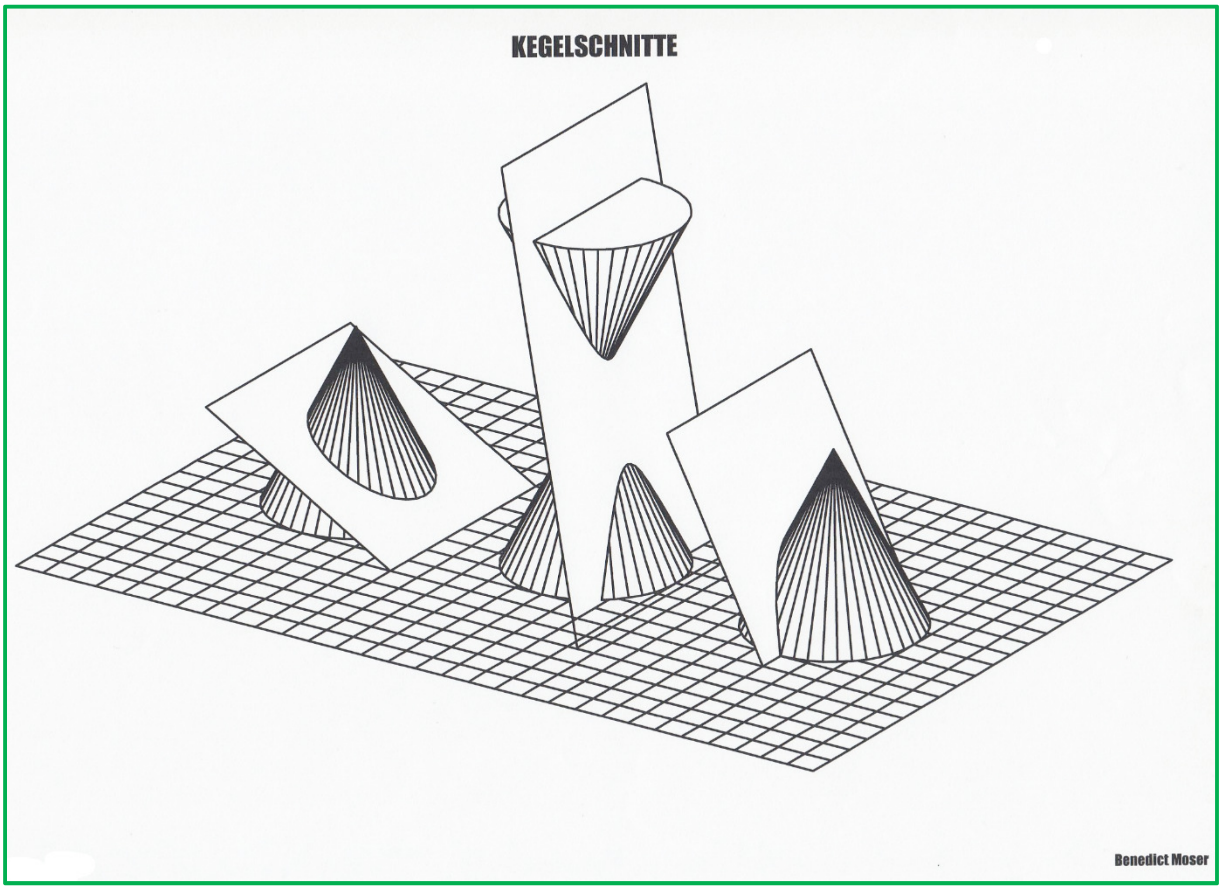


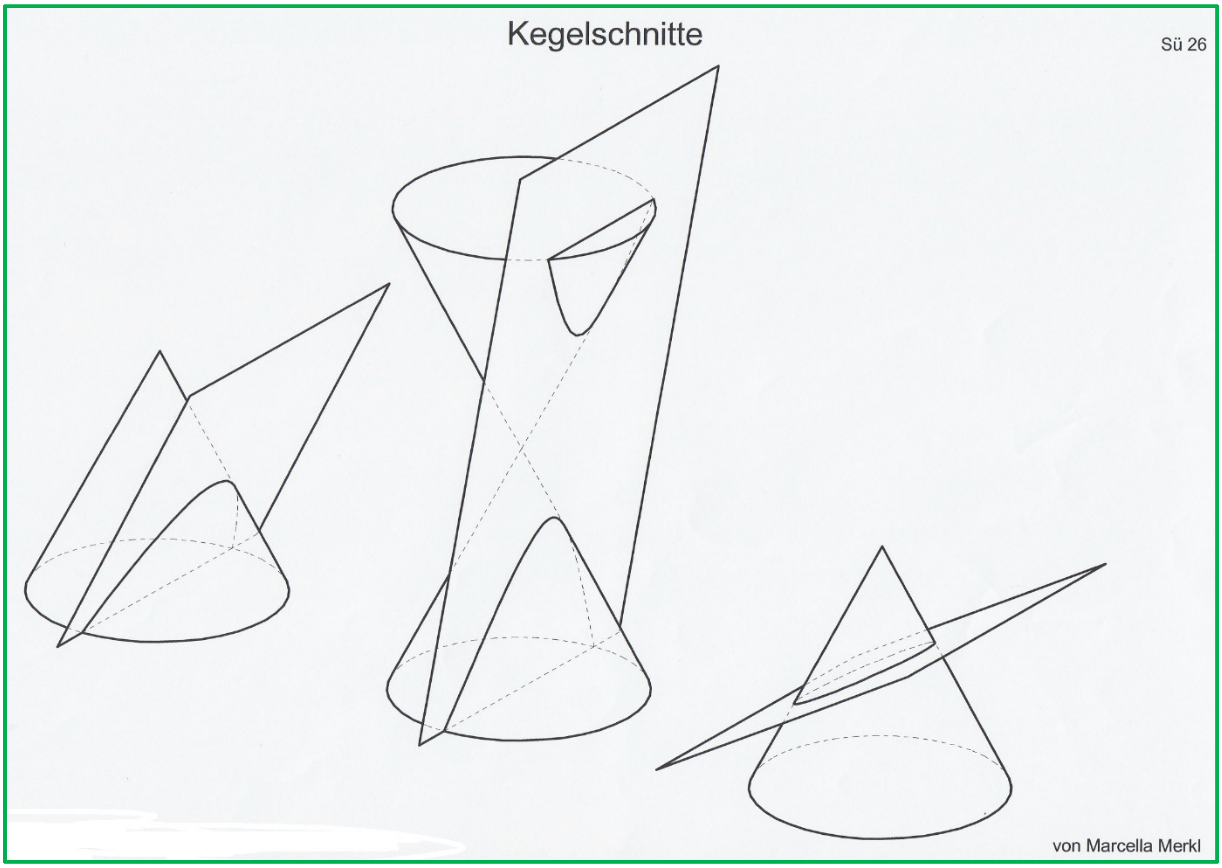
Welche Formen kann der Kugelschatten bei Zentralbeleuchtung annehmen?

7.3 Kegelschnitte - Übersicht



Seit der Verwendung von CAD stellen die Kegelschnitte im Unterricht keine große konstruktive Herausforderung mehr da. Vgl. dazu die folgenden Scans von Schülerzeichnungen (4. Kl. Sek I):





Kegelschnittsmodell nach Georg FUCHS (Wien) für die Sek I zur Verstärkung des Verständnisses (Ausschneidebogen >>> Moodle-Plattform)


Foto: Theres KAFKA

Weitere Definitionsmöglichkeiten können unter Verwendung von DGS neue Einsichten in die Kegelschnittslehre bringen → Übungen:

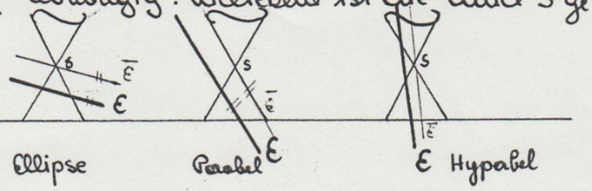
- Ort aller Punkte einer Ebene, dessen Abstände von zwei vorgegebenen Punkten ein vorgeschriebenes Verhältnis haben.
- Ort der Mittelpunkte jener Kreise, die zwei gegebene Kreise berühren → Kegelschnitte
- Ort der Mittelpunkte jener Kreise, die durch einen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis (Leitkreis) berühren → Kegelschnitte

Eine Zusammenfassung der **synthetischen Beweise für die Kegelschnittslinien nach Pierre DANDELIN** (1774 – 1847, Belgien) soll hier nicht fehlen.

>>> https://de.wikipedia.org/wiki/Dandelinsche_Kugel

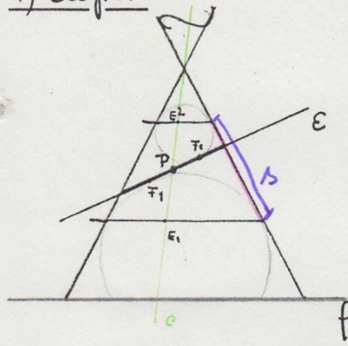
EBENE DREHKEGELSCHNITTE

Eine Ebene ε, die nicht durch S geht, schneidet die Drehkegelfläche nach einer Parabel / Ellipse / Hyperbel. Die Art der Kurve ist vom Schnittverhalten der Richtebene abhängig. Richtebene ist die durch S gehende Parallelebene von ε.



Beweis nach Dandelin

1) Ellipse



2 Kugeln eingeschrieben, die ε in F_1, F_2 berühren.

P, E_2, E_1 liegen auf 1 Erzeugenden e. ($P \in$ Schnittkurve)

E_2, E_1 sind Berührpunkte von e mit den Kugeln.

$\overline{PE_1} = \overline{PF_1}$ (beides Tangenten von P an Kugel!)

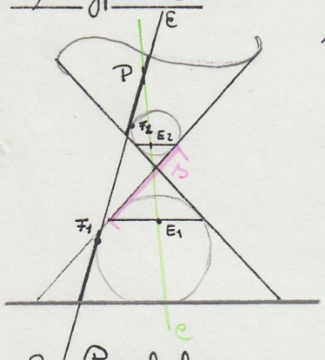
$\overline{PE_2} = \overline{PF_2}$

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PE_1} + \overline{PE_2} = s = \underline{\text{konstant}}$

Für jeden Punkt P ist Abstandsumme von F_1 u. F_2 gleich s.

⇒ Schnittkurve ist eine Ellipse

2.) Hyperbel



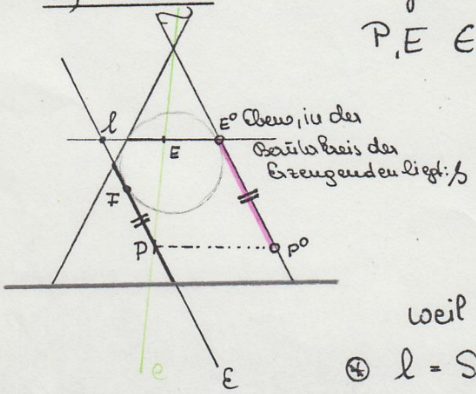
Kugeln, Erzeugende wie oben.

$\overline{PE_1} = \overline{PF_1} \wedge \overline{PE_2} = \overline{PF_2}$

$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PE_1} - \overline{PE_2}| = \overline{E_2E_1} = s = \underline{\text{Konstant}}$

Für jeden Punkt P ist der Betrag der Abstandsdifferenz gleich s ⇒ Schnittkurve ist eine Hyperbel

3.) Parabel



Kugel berührt ε in F;

$P, E \in$ Erzeugende e ($P \in$ Parabel) ⊛

$\overline{PE} = \overline{PF}$

Drehung: $\overline{EP} = \overline{E^\circ P^\circ} \mathrel{\hat=}$ w.L.

$\overline{PF} = \underbrace{\overline{P^\circ E^\circ} - \overline{Pl}}_{\text{weil parallel!}}$

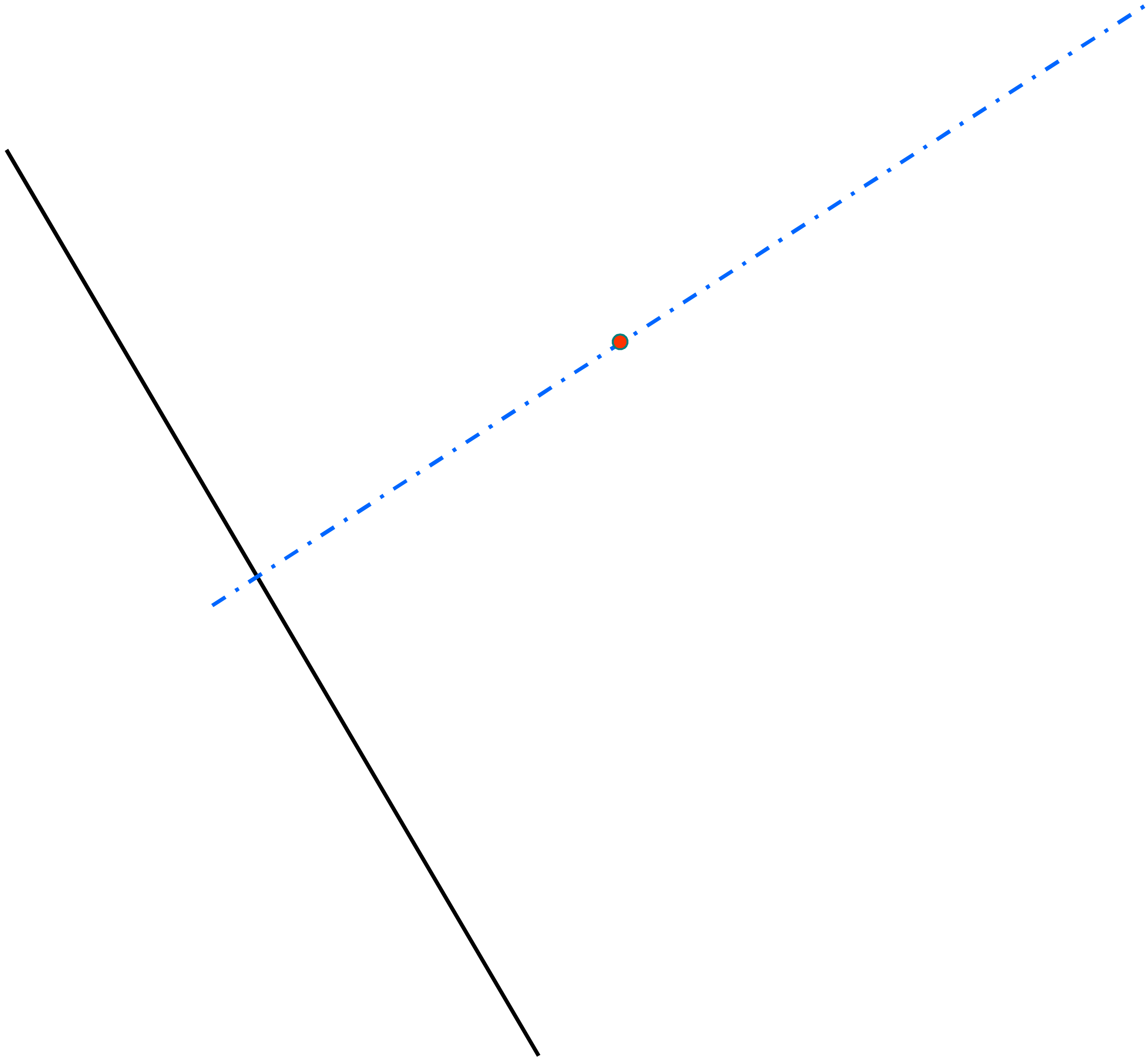
weil $\overline{PF} = \overline{Pl}$ → Parabel

⊛ l = Schnittgerade zwisch ε und β

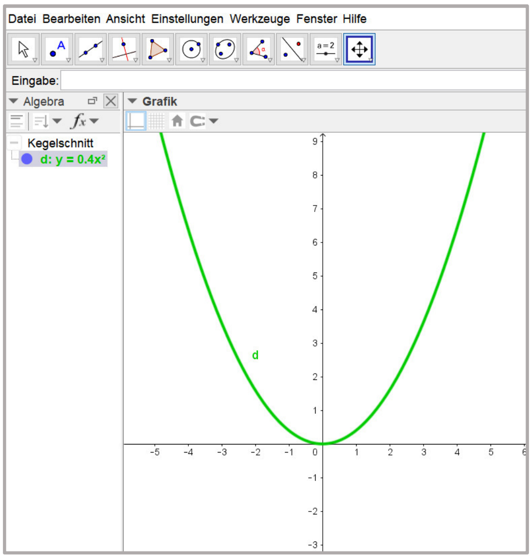
Elisabeth Fragner

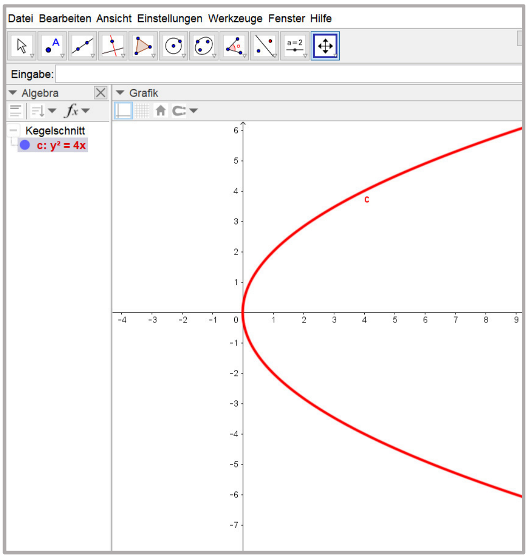
7.4 Die Parabel

Def. 7.3: Eine **Parabel** ist die Menge jener Punkte, die von einer Geraden l („Leitgerade") und einem Punkt F („Brennpunkt") gleich weit entfernt sind.

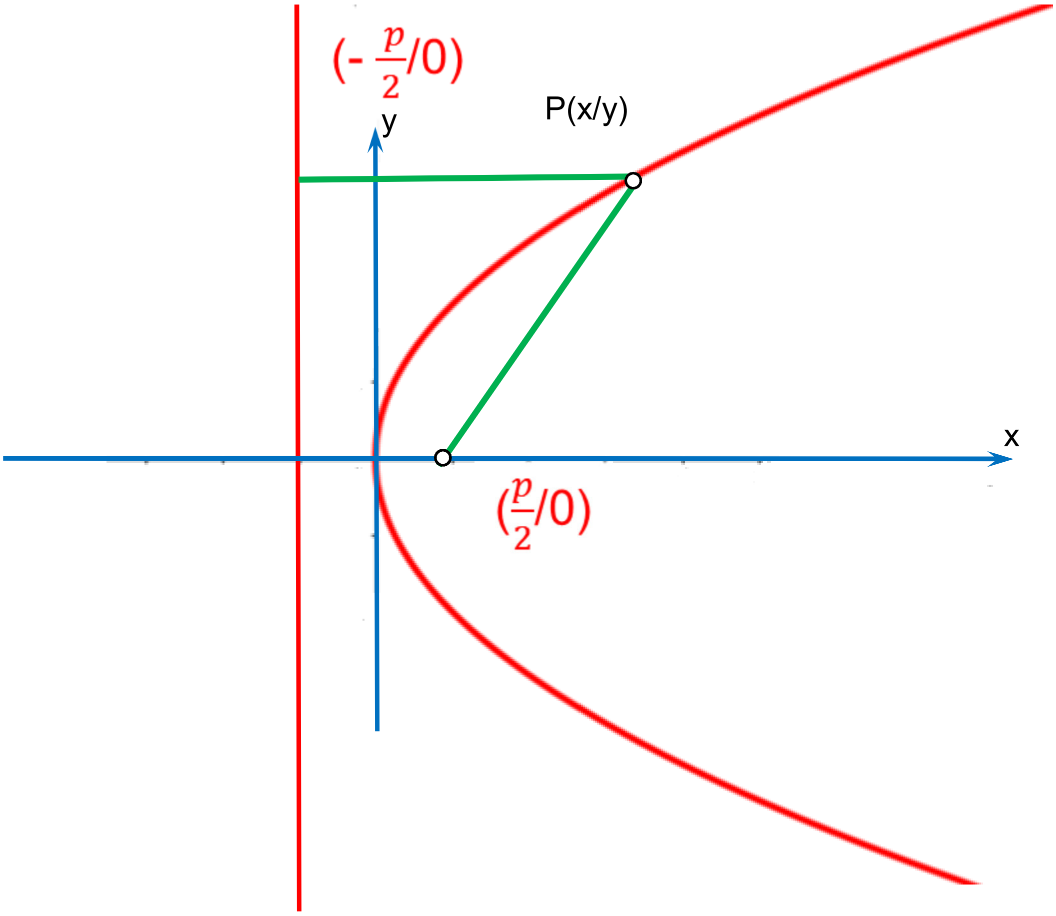


Die Parabel als Graph einer Funktion oder Relation:





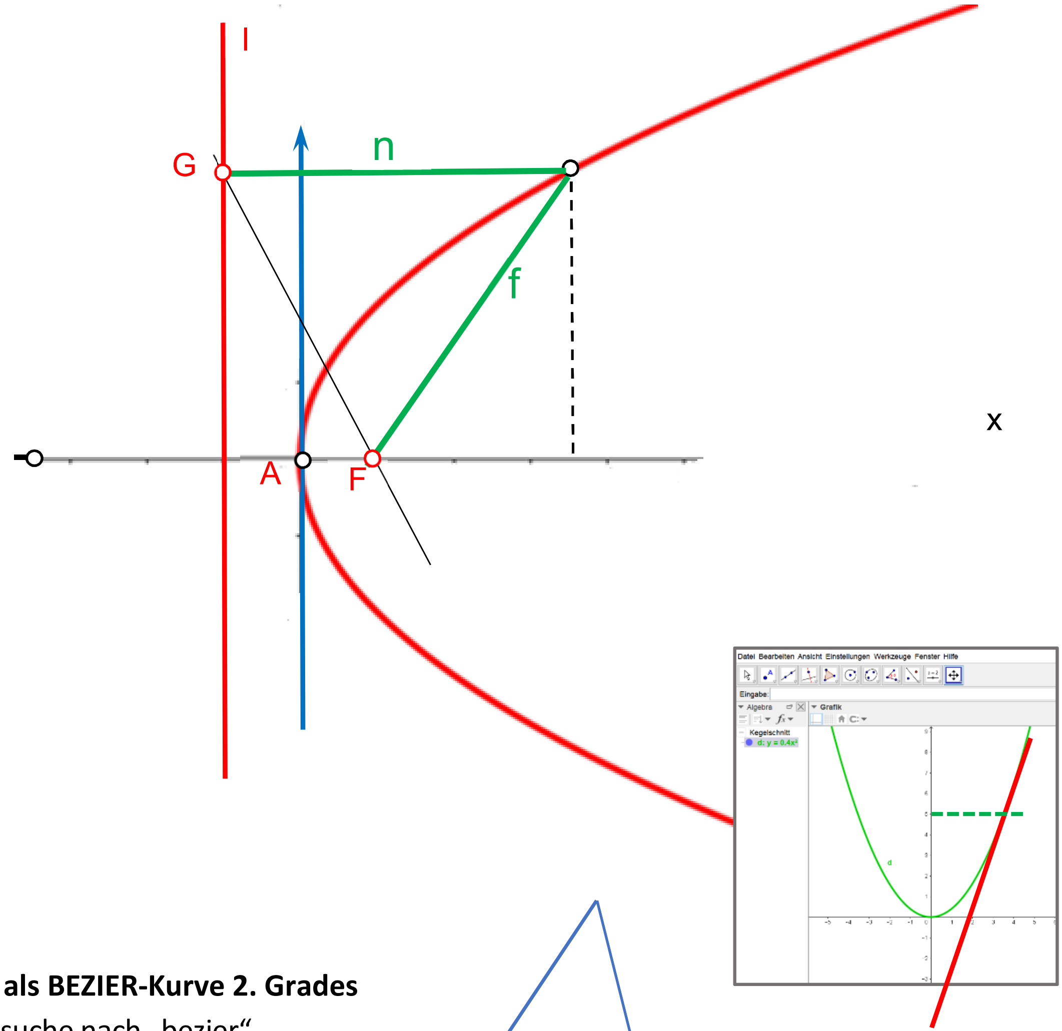
Satz 7.5: Die Ortsliniendefinition einer Parabel und die Relation $y^2 = 2px$ legen dieselbe Kurve fest.



„Wasserstrahlparabeln" bei einem Springbrunnen: (Wurfparabel)

Konstruktive Ergänzungen

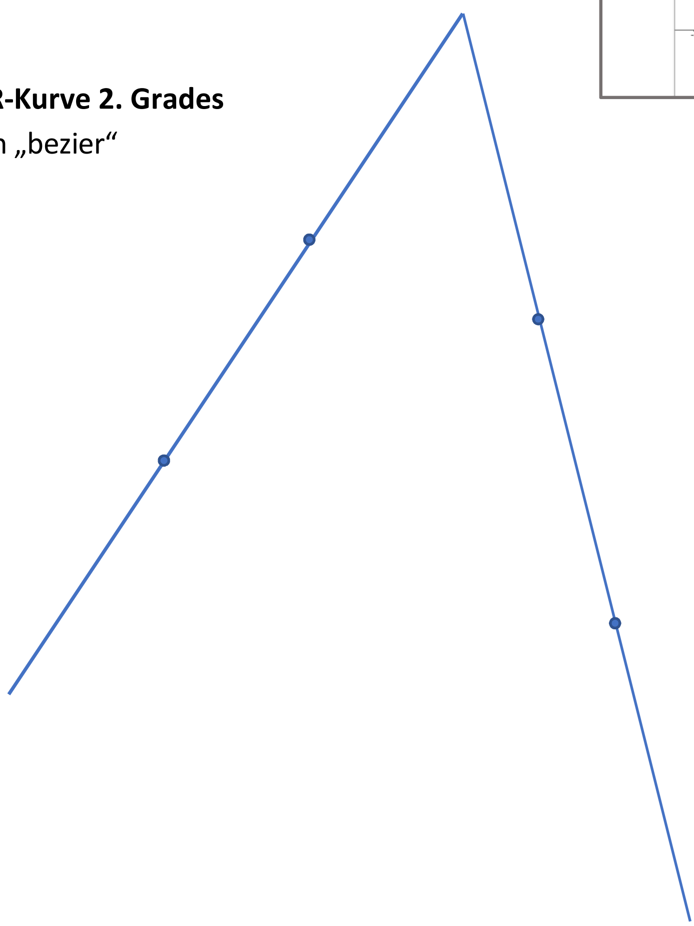
Krümmungskreis- und Tangentenkonstruktion



Die Parabel als BEZIER-Kurve 2. Grades

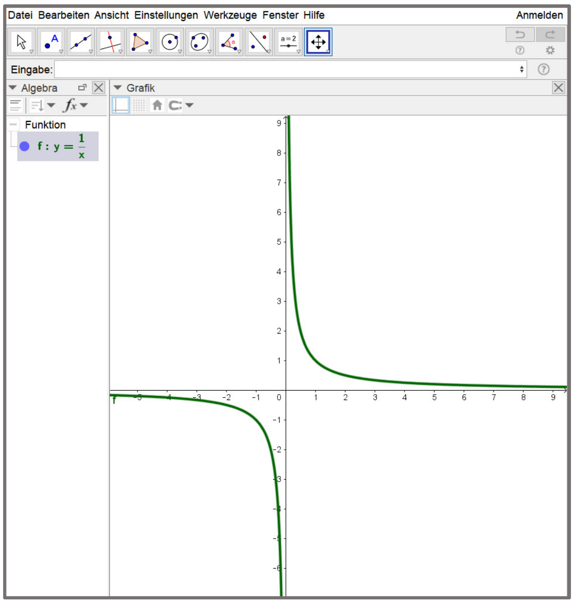
>>> Internetsuche nach „bezier“

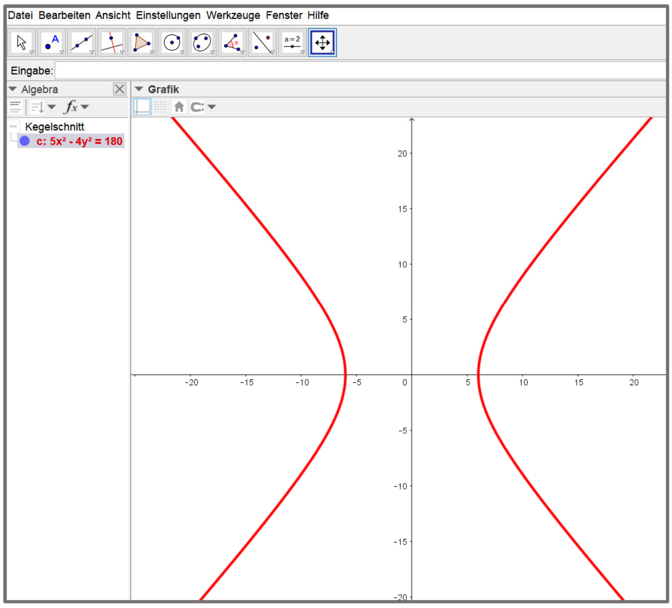
z.B.: u = 1/3



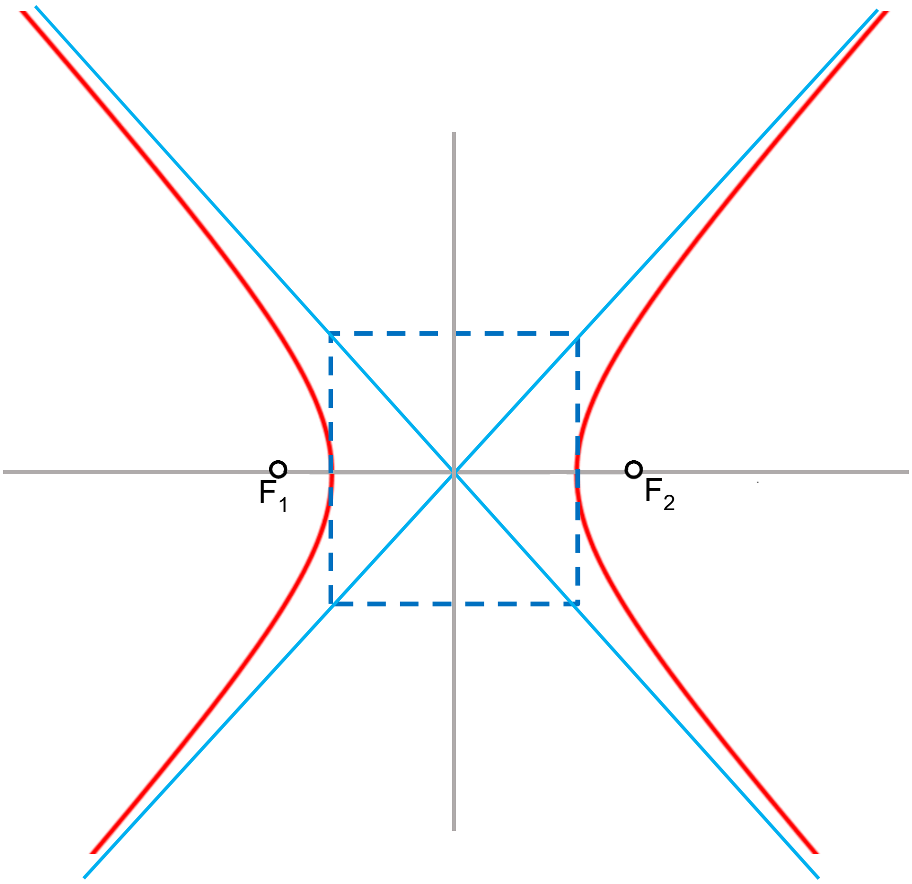
7.5 Die Hyperbel

Auftreten in der Sek I als Graph einer Funktion oder Relation:



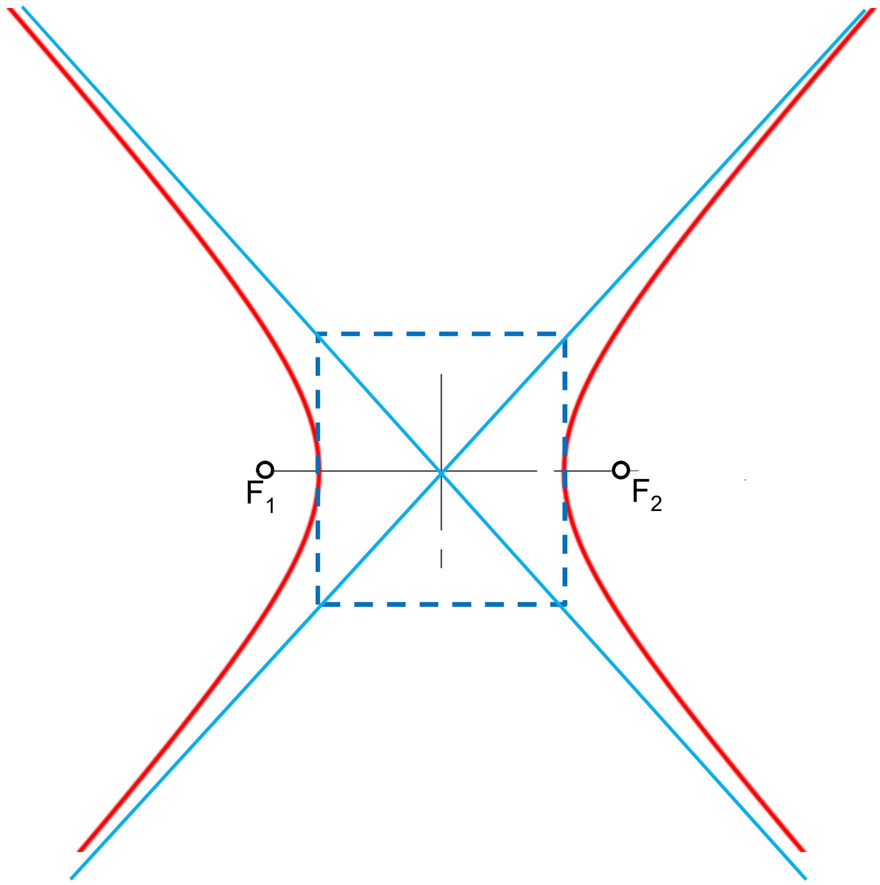


Def. 7.4: Eine **Hyperbel** ist die Menge jener Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei gegebenen Punkten konstant ist.



Konstruktive Ergänzungen:

Krümmungskreis- und Tangentenkonstruktion



Hyperbel als Licht-Schattengrenze bei Zentralbeleuchtung:

8. Rund um Kreis und Kugel und weitere Körper/Flächen

Fachmathematik-Fulmek-Skriptum: „Kreis“ (p 6)
Internetsuchtipps: Kreis und Kugel
Lehrplan 1. Klasse Sek I: Zeichnen von Kreisen, Kreisteilen, Zeichengeräte, … Quader (V, O)
Lehrplan 2. Klasse Sek I: Prismen (V)
Lehrplan 3. Klasse Sek I: Prismen, Pyramiden berechnen (V, O)
Lehrplan 4. Klasse Sek I: Kreis, Kreisteile (u, A), Drehzylinder, Drehkegel, Kugel (Formeln für V, O erarbeiten und anwenden)
GZ Sek I: Krumme Flächen: Drehzylinder, Drehkegel, Kugel
Lehrplan 7. Klasse Sek II: Nichtlineare analytische Geometrie - Beschreiben von Kreisen, … durch Gleichungen - Schneiden von Kreisen mit Geraden, Ermitteln von Tangenten

Was ist ein Kreis? $\{ X \mid XM = r \}$ oder $\{ X \mid XM < r \}$ oder $\{ X \mid XM \leq r \}$

Sprachliches Dilemma: „Kreis“ ist meist als *Kreislinie* definiert, gemeint ist manchmal – ohne dies extra hervorzuheben - die ganze von der Kreislinie eingeschlossene Fläche, also *Kreisfläche*. Ähnlich verhält sich beim Begriff „Kugel“: Meist ist die Kugel(ober)fläche (= „Sphäre“) gemeint, trotzdem wird vom Volumen einer „Kugel“ gesprochen.

An sich sollte sprachlich unterschieden werden:

Def. 8.1: Unter einer **Kreislinie** versteht man die Menge jener Punkte der Ebene, die von einem Punkt M konstanten Abstand r haben

Def. 8.2: Unter einer **Kreisfläche** versteht man die Menge jener Punkte der Ebene, die von einem Punkt M maximal r entfernt sind.

Def. 8.3: Unter einer **Kugelfläche (Sphäre)** versteht man die Menge jener Punkte des Raumes, die von einem Punkt M konstanten Abstand r haben

Def. 8.2: Unter einer **Kugel** versteht man die Menge jener Punkte des Raumes, die von einem Punkt M maximal r entfernt sind.

8.1 Kreisformeln

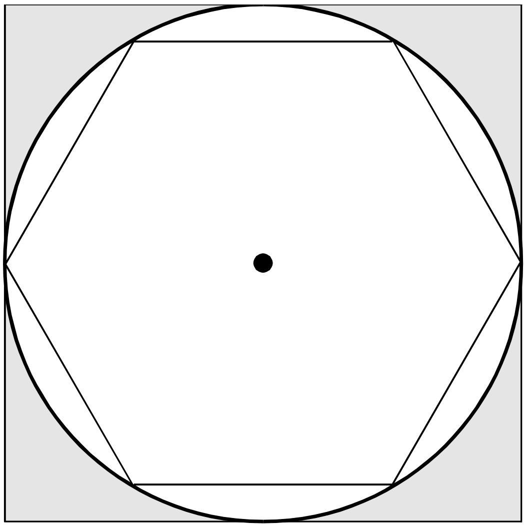
Zum Standardunterrichtsinhalt gehört eine altersgerechte Herleitung der Formeln für Umfang und Flächeninhalt, sei es durch experimentelles Nachmessen oder einfaches Einschranken.

Berechnungen von Kreisumfang und Kreisfläche sind untrennbar mit dem **ARCHIMEDES** (287-212 v.Chr. SYRAKUS im heutigen Süditalien, „Störe meine Kreise nicht.“) verbunden.

Kreisumfang

Der Umfang wird durch ein-und umgeschriebene Polygone angenähert, z.B. durch ein reguläres Sechseck und ein Quadrat:

$$6.r \leq u \leq 8.r \quad (2.r = d)$$



Kreisumfang =

Durchmesser mal einer Zahl zwischen 3 und 4.

ARCHIMEDES führte dieses Verfahren bis zum ein-und umgeschriebenen 96-eck durch und erhielt:

$$3\tfrac{10}{71}.d \leq u \leq 3\tfrac{1}{7}.d$$

Erst durch Leonhard EULER (1707 - 1783) wurde diese Verhältniszahl durch π abgekürzt:

$$\pi = 3,14159\,26535\,89793\,23846\ldots$$

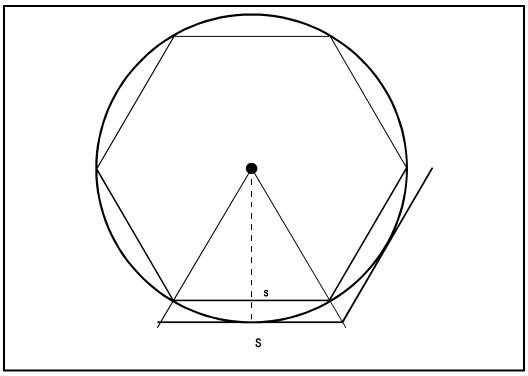
Leonhard EULER auf dem 10-Franken-Schein

Verschiedene Merkverse erleichterten früher das Behalten der ersten Stellen dieser irrationalen Dezimalzahl, wie zum Beispiel:

Wie	,	o	dies	π	macht	ernstlich	so	vielen	viele	
3	**,**	**1**	**4**	**1**	**5**	**9**	**2**	**6**	**5**	**3**

Bemerkung: Für FreundInnen utopischer Romane sei auf „CONTACT“ von Carl SAGAN (KNAUR Bd.1680) hingewiesen, in dem diese transzendente Zahl eine gewisse Rolle spielt! (klassische Verfilmung 1997)

Kreisfläche

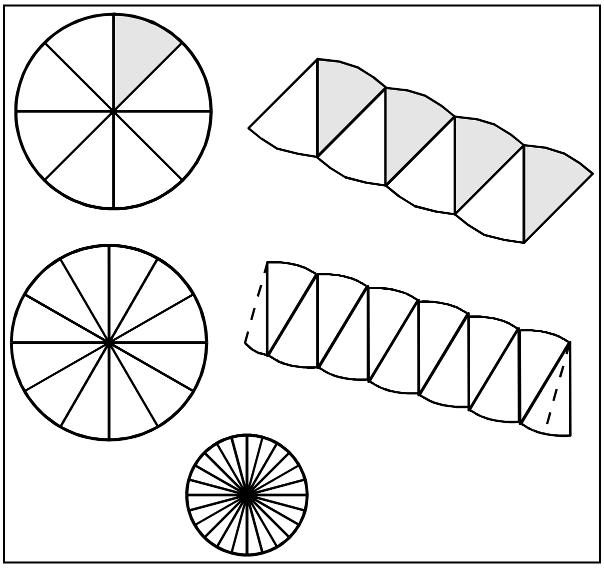


Man nähert die Kreisfläche durch die Inhalte ein-und umgeschriebener Vielecke an:

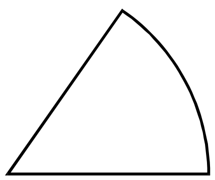
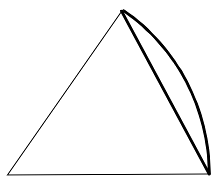
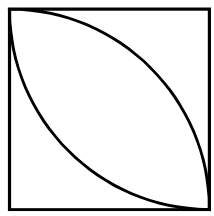
$$n.A_s \leq A \leq n.A_S$$

Im Grenzübergang von n gegen ∞ ergibt sich:

In der Schule bewährt sich ein anderes Verfahren zur Herleitung der Flächenformel, wenn der Umfang bereits bekannt ist: Die Kreisscheibe wird in gleich große Sektoren zerteilt, diese werden dann anders angeordnet.

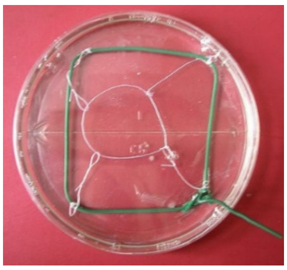


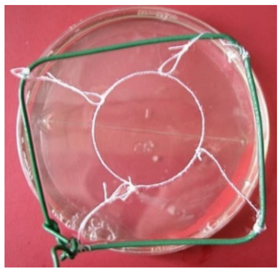
Kreisteile

Sektor(Ausschnitt)	Segment (Abschnitt)	Beispiel: Inhalt einer „Linse“
		

Isoperimetrisches Problem

Welche ebene Figur hat bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt?





Ein Experiment: In einem Drahtrahmen wird eine Schlinge aus einem Seidenfaden lose befestigt, der Rahmen in eine Seifenlösung getaucht: Eine Seifenhaut bildet sich im Rahmen, der den **F**aden trägt. Das Innere der Fadenschlinge wird durch das „Platzenlassen“ von der Seifenhaut befreit.
Blitzartig springt die dann Fadenschlinge auf eine kreisförmige Schlinge um. Nach Zerstörung der Seifenhaut im Inneren bildet die Haut zwischen Faden und Drahtrahmen eine **möglichst kleine Oberfläche**, die Fläche im Inneren des Fadenringes (Kreises) wird demnach **möglichst groß**.

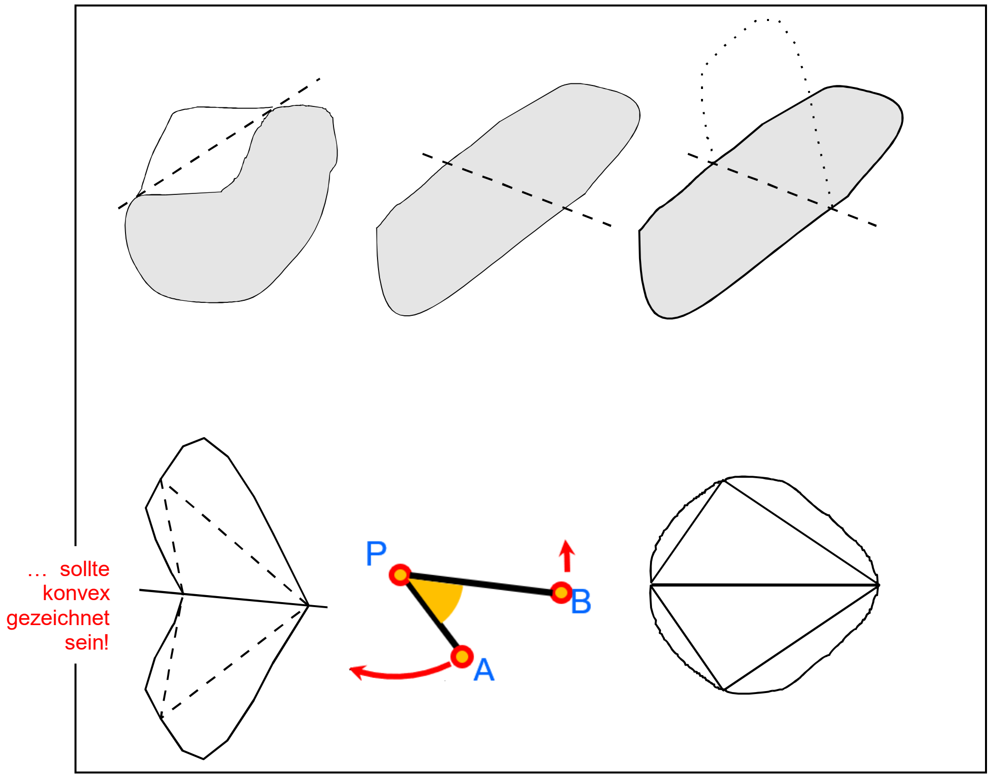
So kann ein experimenteller/physikalischer Hinweis für die Lösung des isoperimetrischen Problems („**iso**“...gleich, „**perimeter**“...Umfang) erbracht werden.

Satz 8.1: Unter allen Figuren mit gleichem Umfang ist die Kreisfläche jene, die den größten Inhalt hat.

(vgl. Sage von Königin DIDO bei der Gründung KARTHAGOS)

Mathematisch lässt sich die Lösung des Problems etwa folgendermaßen einsehen:

Hinweis: Die Beweisskizze wurde von **Jakob STEINER** (1796 - 1863, BERN, BERLIN; Autodidakt) gegeben, eine Beweislücke wurde von **Karl WEIERSTRASS** (1815 - 1897, BERLIN; „Ein Mathematiker, der nicht etwas POET ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein“) geschlossen]:



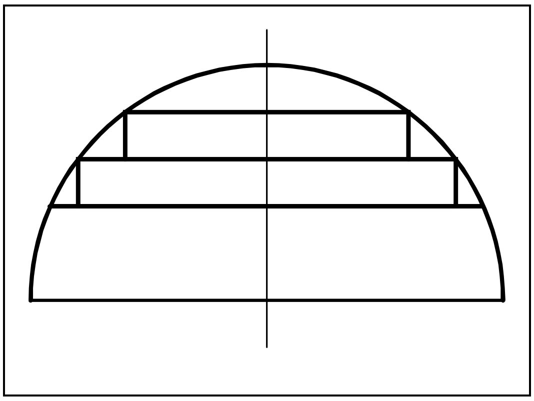
Hinweis: In der Ebene gilt die **isoperimetrische Ungleichung** $A \leq \frac{u^2}{4\pi}$ (ohne Beweis)

8.2 Kugelvolumen und Oberfläche

Bereits Aufgabe 3.1. befasste sich mit der Herleitung der Formel für das Kugelvolumen (mittels Prinzip von CAVALIERI). Nun folgt eine Herleitung, die ebenfalls ARCHIMEDES zugeschrieben wird und auf der Exhaustionsmethode beruht. Diese Aufgabe könnte mit konkreten Zahlenwerten ohne weiteres bereits in der Sek Näherungswerte des Kugelvolumens liefern.

Aufgabe 8.1: Herleitung des Kugelvolumens

Berechnet soll das Volumen einer Halbkugel werden. Diese zerteilt man durch Zerschneiden parallel zur Begrenzungsfläche in n gleich dicke (hohe) Teile. Diese Teile ersetzt man näherungsweise durch Zylinderscheiben. Deren Volumen lässt sich berechnen und man erhält eine Näherung für das Maß des (Halb-)Kugelvolumens.



n Teile; Höhe einer Scheibe:

Radius der i-ten Scheibe:

Volumen der i-ten Scheibe:

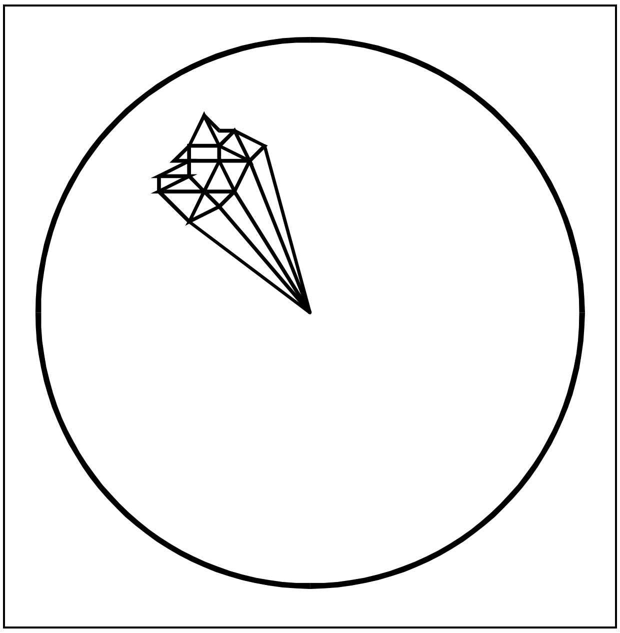
Summe aller Scheibenvolumina:

Durch Erhöhung der Anzahl der Scheiben wird diese Näherung immer genauer, in der Grenze für n$\to\infty$ (Schichtendicke $\to$ 0) erhalten wir das Kugelvolumen.

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

Kugeloberfläche

Zur Bestimmung des Maßes der Oberfläche denken wir uns diese in (bel. viele) Teile zerlegt. Die Ecken dieser Teilflächen werden mit der Kugelmitte verbunden. Es entstehen pyramidenartige Gebilde, deren Grundflächen etwas gewölbt sind. Je kleiner diese Teilflächen gewählt werden, desto genauer stimmen die Volumina der Teilkörper mit den Inhalten von Pyramiden überein.

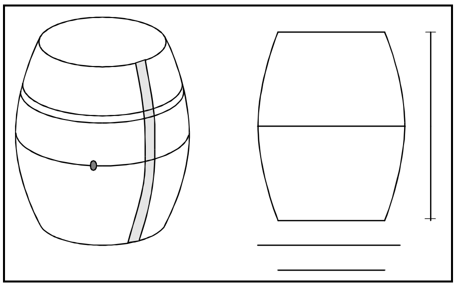


Der gesamte **FACETTENKÖRPER** füllt die Kugel aus.

Deshalb kann man folgern:

Zusatz: Berechnung des Inhalts von Fässern:

.... Spundloch, ... Dauben



KEPLER, 1613 („Stereometria doliorum vinariorum“ „Die Stereometrie der Weinfässer“) betrachtete Fässer mit verschiedenen Daubenformen (parabel-, ellipsen- und hyperbelförmige Dauben). Ausgangspunkt seiner Arbeit war die Überprüfung der damals gängigen Methode zur Inhaltsbestimmung mit Hilfe eines Messstabes. Die nebenstehende Skizze wurde aus [KARLSON, Du und der Zauber der Zahlen, 1954] entnommen.

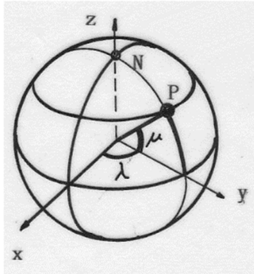
SIMPSONsche Regel, 18. Jahrhundert:

$$V=\frac{A_G+4.A_S+A_D}{6}.h$$

LAMBERT, 1765

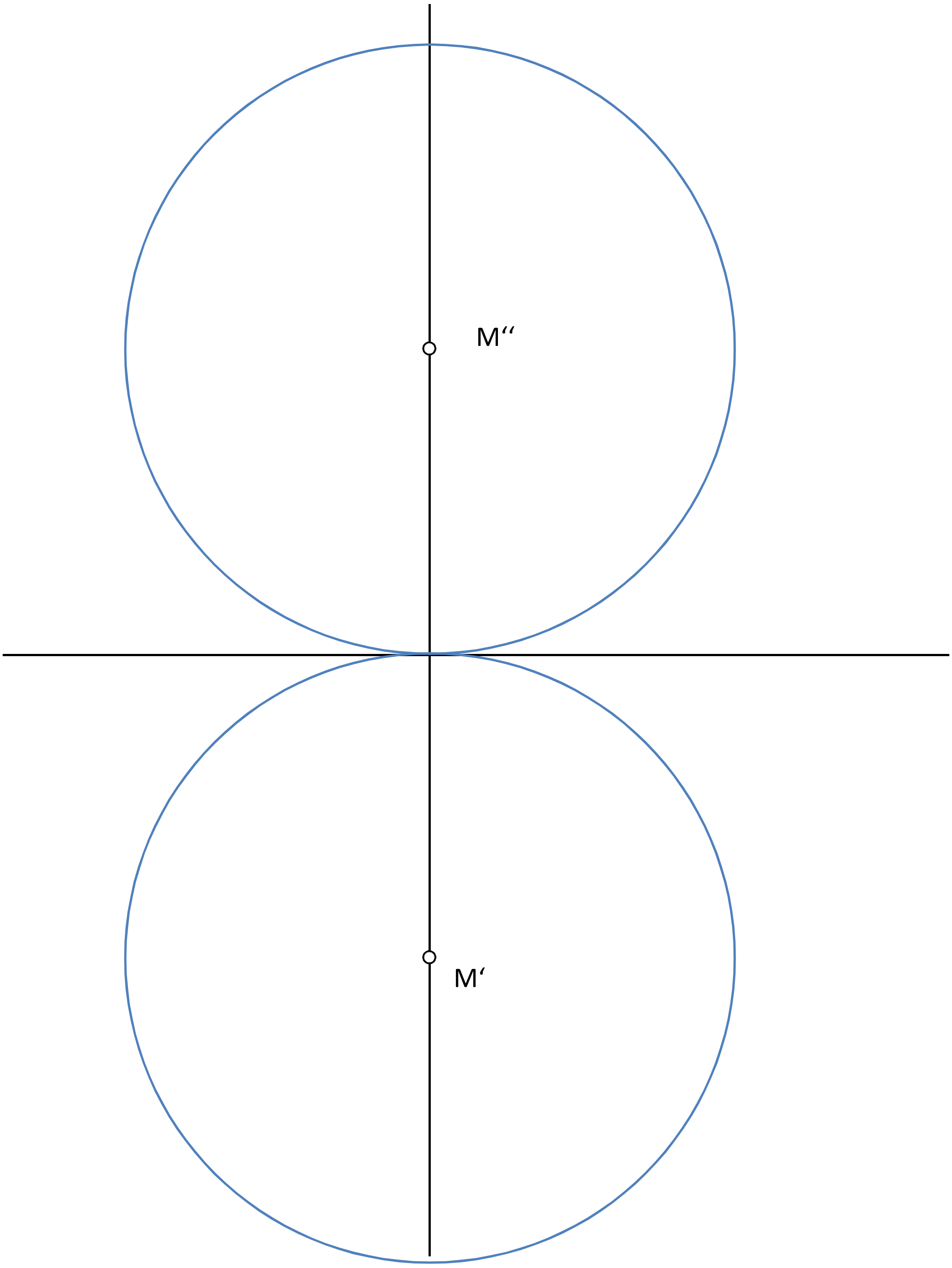
$$V=\left(\frac{2R+r}{3}\right)^2.\pi.h$$

8.3 Die Erde als Kugel - konstruktiv



Vorbemerkungen: Beispiele rund um die „**Erdkugel**" beruhen meist auf dem Kugelmodell mit Radius 6370 km bzw. bei Konstruktionsbeispielen (in GZ) oft maßstäblich auf einer Kugel mit R = 6 cm (☺ Wie groß ist der Maßstab etwa?)
Die Erdform wird durch ein **Drehellipsoid** (a = 6 378 163 m, b = 6 356 777 m, also a :b = 298 : 297) schon besser und durch ein >>>**Geoid** noch besser angepasst.

Aufgabe 8.2: Auf dem in Grund-und Aufriss dargestellten Modell der Erdoberfläche soll die Stadt RIO DE JANEIRO mit den Koordinaten (43° westl. Länge / 22° südl. Breite) eingetragen werden. Zeichnen Sie den Breitenkreis und den Meridian durch RIO unter Beachtung der Sichtbarkeit ein. Beschriften Sie Nord- und Südpol sowie den Äquator.



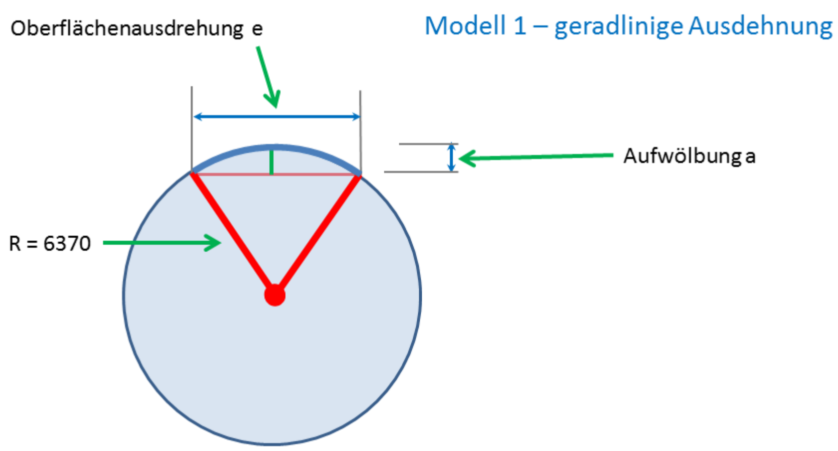
Aufgabe 8.3*: Die Erdoberfläche werde durch eine Kugelfläche K mit Mittelpunkt M(6/0/8) und Radius 6 cm repräsentiert, eine um sie kreisende Raumstation durch den Punkt R(2/8/0). Das von der Station einsehbare Gebiet auf der Erdoberfläche wird durch den Berührkreis mit dem Tangentenkegel aus R begrenzt. Berechnen Sie die Gleichung der Kugel. Ermitteln Sie rechnerisch Mittelpunkt und Radius des Berührkreises. (Stellen Sie den Berührkreis in mindestens einem Riss dar. Verwenden Sie dabei die berechneten Daten für den Kreismittelpunkt und den Radius!)

8.4 Kugelaufgaben

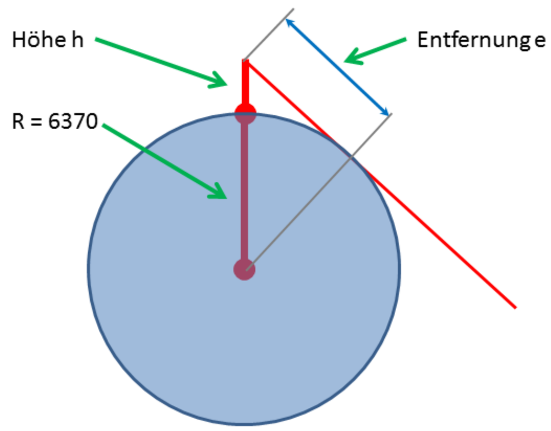
„Geometrie = Erdmessung"

Aufgabe 8.4: Man denke sich eine geradlinige Verbindung vom Sonnenmittelpunkt zum Erdmittelpunkt. Der Schnittpunkt dieser Verbindung mit der Erdoberfläche heißt „**Bildpunkt**" (der Sonne). (Dieser Punkt ist für die Bestimmung der geografischen Länge bedeutsam.) Fertigen Sie eine Skizze dieses Sachverhalts, überlegen Sie auf welcher Bahnkurve dieser Punkt läuft und berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich dieser Punkt bewegt. Geben Sie weitere Fragestellungen zu diesem „Bildpunkt" an.

Aufgabe 8.5: Entwickeln Sie eine Formel, mit der man die Höhe der Aufwölbung von Seen berechnen kann, z.B. vom Wörthersee (e = 16 km).

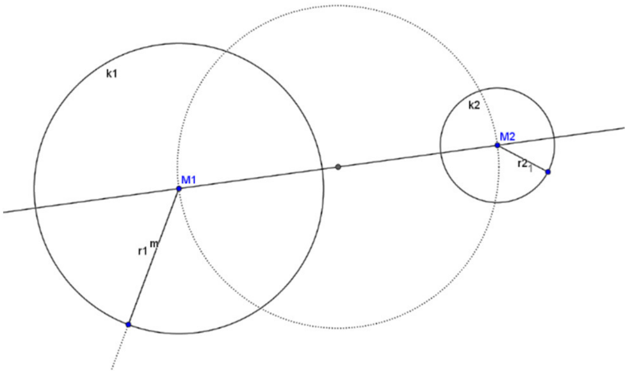


Aufgabe 8.6: Wie weit sieht man auf der Erdoberfläche, wenn man auf einem Turm der Höhe h steht. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die zu entwickelnde Formel tatsächlich angewendet werden kann.



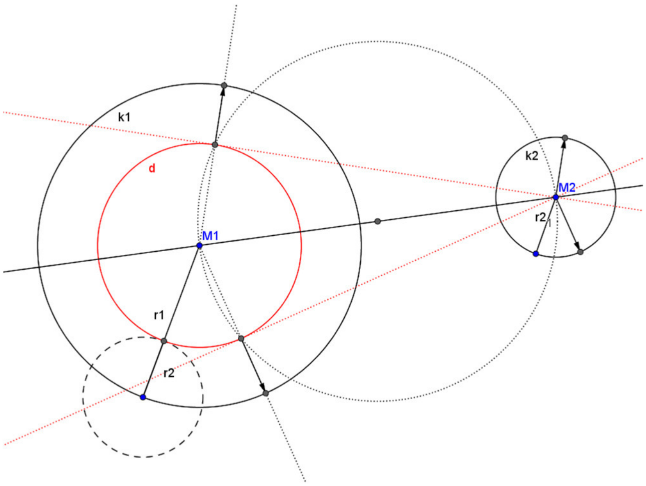
Ergänzung und Vorschau:

Zu 8 Kreiskonstruktionen: Gemeinsame Tangenten an zwei Kreise

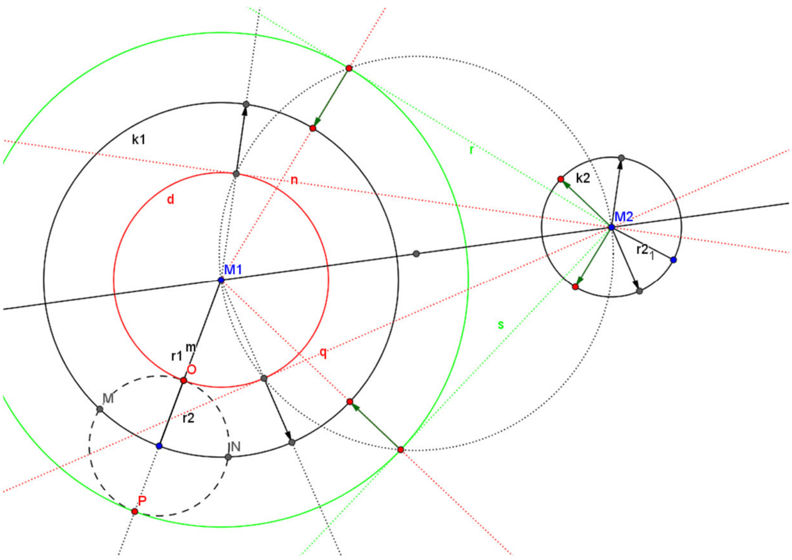


… mittels „Dilatation“
(Veränderung, Ausdehnung)

„Äußere“ Tangenten …
… parallel zu den Tangenten aus M2 an Kreis (r1-r2)

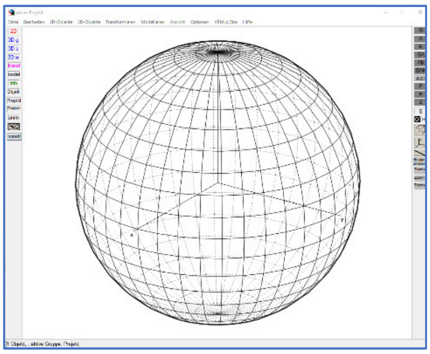


„Innere“ Tangenten …
… parallel zu den Tangenten aus M2 an Kreis (r1+r2)



Zu 8 Kugelkonstruktionen: Beispiel 8.2 mit Hilfe von GAM

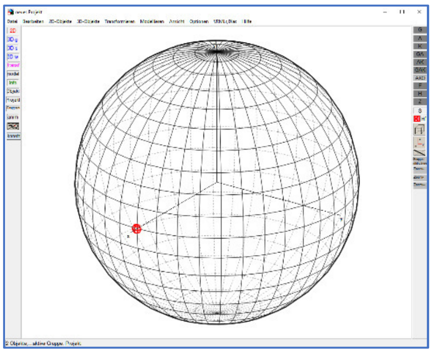
Zunächst: 3D-Objekte | Kugel | Radius 5 | Meridiane = 40



Rio DE Janeiro soll als kleine rote Kugel (r = 0,2) dargestellt werden:

OF = rot | Radius = 0,2 | Meridiane = 8

Die Kugel wird ebenfalls im Ursprung erzeugt und muss nun an die Oberfläche transportiert werden.

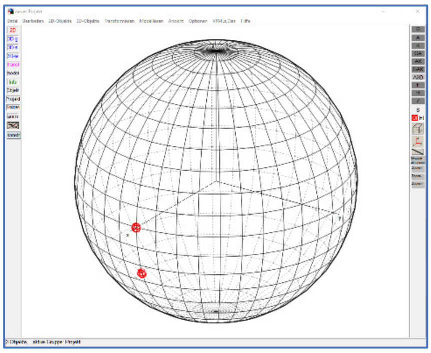


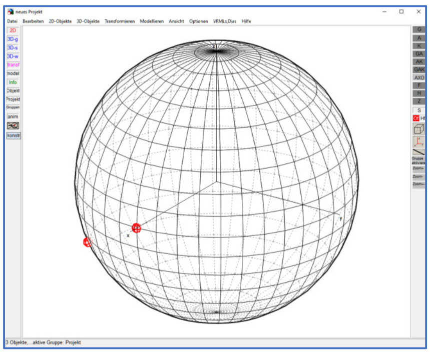
Transformieren | Verschieben | letztes | t

Der Mittelpunkt der „RIO-Kugel“ befindet Kugeloberfläche, genauer gesagt am Äquator. Nun muss die geographische Breite und Länge eingetragen werden.

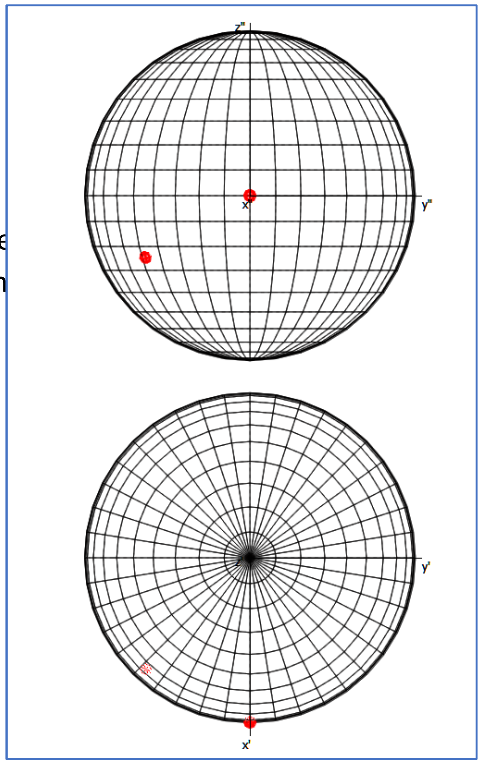
Transformieren | Drehen| letztes | Drehwinkel = 22| Drehachse = y-Achse | Kopieren 1

(Durch das Kopieren können danach schneller weitere Orte eingetragen werden.)





Grund-Aufriss-Einstellung:

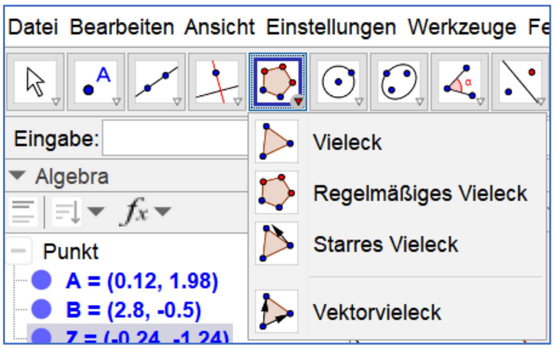


Transformieren | Drehe

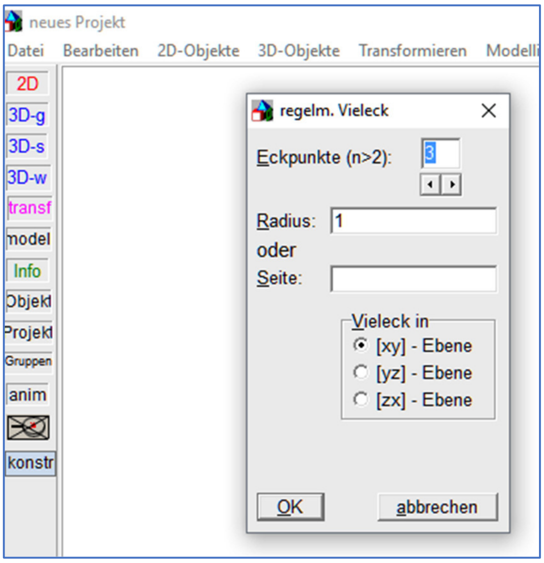
Drehwinkel = -43| Dreh

Zu 9: Regelmäßige Vielecke

Geogebra

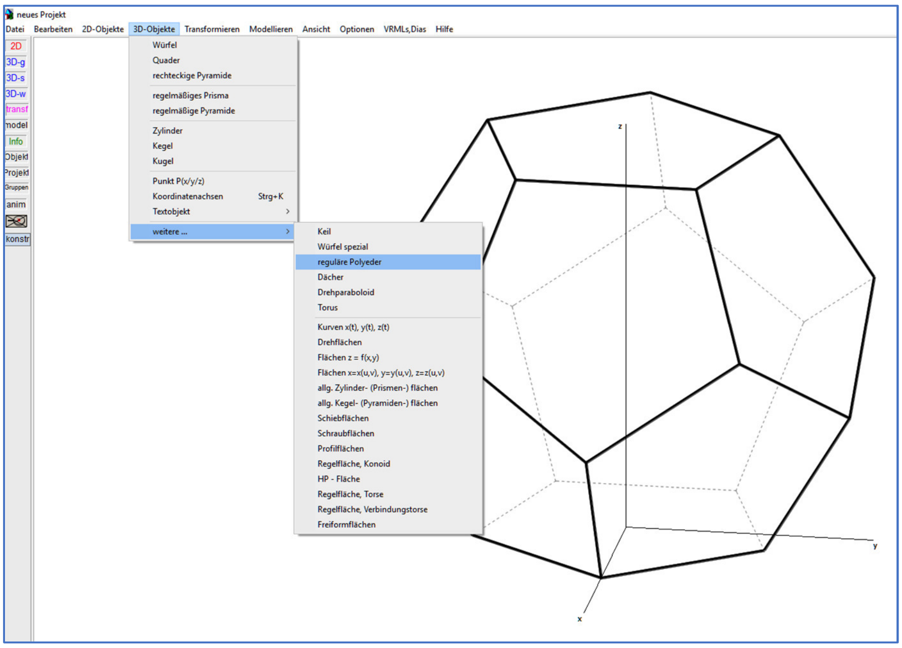


GAM



Zu 9: Regelmäßige Körper

GAM

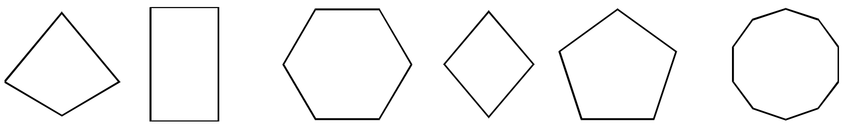


9. Regelmäßige Vielecke, reguläre und halbreguläre Körper

9.1 Regelmäßige Vielecke

Def. 9.1: Ein Vieleck heißt **regelmäßig** oder **regulär**, wenn alle **Seiten gleich lang** und alle **Innenwinkel gleich groß** sind.

Ohne Beweis: Jedes regelmäßige Vieleck besitzt einen In-und einen Umkreis.



$$p = 2^{2^n} + 1$$

3
5
17
257
65537

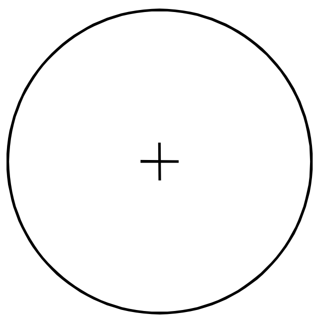
Carl Friedrich GAUSS (1777 - 1855) konnte beweisen, dass jedes regelmäßige Vieleck mit p Ecken, wobei p eine Primzahl der obigen Form ($p = 2^{2^n} + 1$) ist, **mit Zirkel und Lineal** konstruierbar ist. Bereits als 18-jähriger hatte GAUSS die bis dahin unbekannte Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks gefunden (veröffentlicht 1796).
>>> Internetsuche nach „Fermatsche Primzahlen“

Aus den bekannten regelmäßigen Vielecken lassen sich beliebig viele weitere konstruieren:

Dreiecksfolge

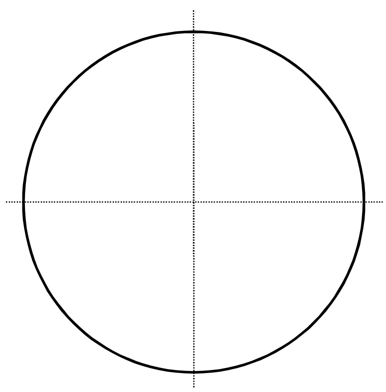
Die aus dem Mathematikunterricht bekannte Teilung wird verwendet ...

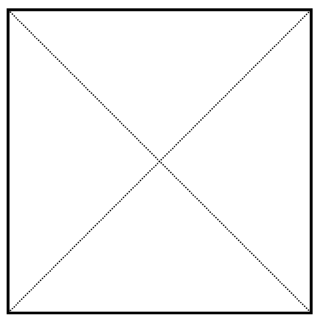
Dreieck
Sechseck
Zwölfeck
...



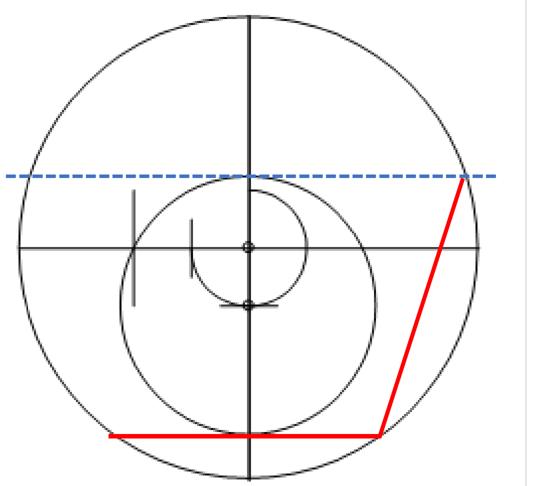
Vierecksfolge

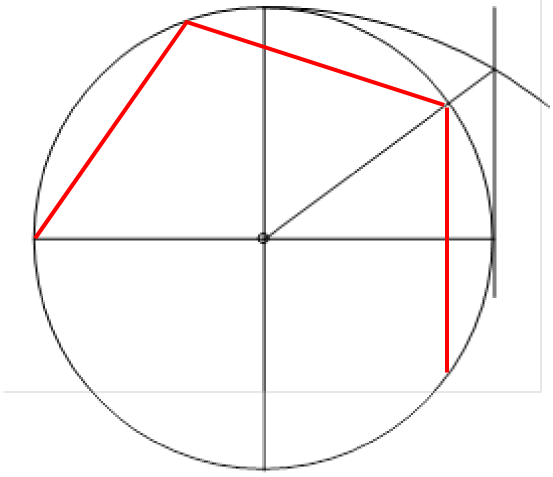
Aufgabe 9.1: Beweisen Sie, dass man die Eckpunkte eines regelm. Achtecks erhält, wenn man die vier Kreisbögen, die in den Eckpunkten zentriert sind und durch die Quadratmitte gehen, mit den vier Quadratseiten schneidet.





Aufgabe 9.2: Untersuchen Sie, ob beide folgenden Konstruktionen tatsächlich zur einem regelmäßigen Fünfeck führen. Man geht jedes Mal vom Umkreis aus:





Konstruktion A:

1. Zwei aufeinander normale Kreisdurchmesser werden gezeichnet.
2. Ein Radius wird halbiert.
3. Auch der Viertelteilungspunkt des halbierten Halbmessers wird gezeichnet.
4. Dieser Teilungspunkt wird um 90° auf den unteren Radius gedreht.
5. Dieser Punkt ist Mittelpunkt eines Kreises, der den zuerst konstruierten Halbierungs-punkt enthalten soll.
6. Zum zuerst geteilten Durchmesser werden parallele Tangenten an den soeben gezeichneten Kreis gelegt. Diese schneiden 4 Eckpunkte des Fünfecks aus.

Konstruktion B:

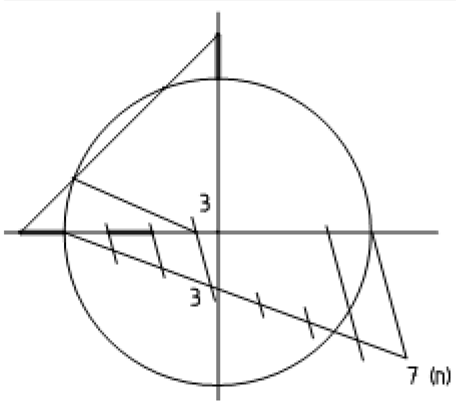
1. Beginn wie bei Konstruktion A.
2. Ein Kreisbogen, der im unteren Endpunkt des lotrechten Durchmessers zentriert ist und den oberen Eckpunkt enthält, wird gezeichnet.
3. Eine zum lotrechten Durchmesser parallele Tangente wird bis zum Schnitt mit dem Bogen gezeichnet.
4. Eine Gerade durch den Mittelpunkt des Umkreises und den entstandenen Schnittpunkt schneidet einen Eckpunkt des Fünfecks aus dem Umkreis aus.
5. Einen Nachbareckpunkt erhält man durch Spiegelung des ersten Eckpunkts am horizontalen Durchmesser.

Die Konstruktion C stammt von FIALKOWSKI und ist seinem Buch „Zeichnende Geometrie“, 1882, entnommen.
(fehlerhaft, warum?)

Näherungskonstruktion für beliebige Eckenzahl

Als Beispiel sei die Konstruktion eines regelmäßigen **Siebenecks** angeführt.

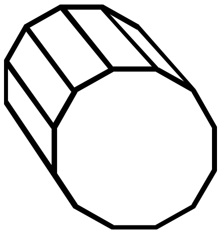
Man zeichnet wiederum zuerst den Umkreis und zwei normale Kreisdurchmesser.



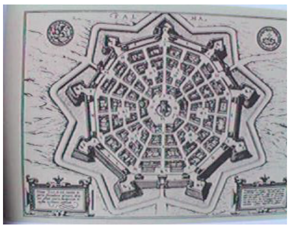
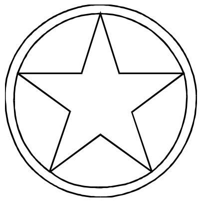
1. Ein Durchmesser wird in n gleiche Teile geteilt.
2. Die Durchmesser werden um eine dieser entstandenen Teilstrecken links und oben verlängert.
3. Die so entstandenen Endpunkte bestimmen eine Strecke, die eingezeichnet wird.
4. Der untere der beiden Schnittpunkte mit dem Kreis wird mit dem dritten Teilungspunkt (unab-hängig von der Eckenanzahl!) verbunden. Diese Verbindungsstrecke ist näherungsweise gleich der n-Eck-Seitenlänge.

Hinweis: Diese Konstruktion wurde im Schweizer Geometrielehrbuch „Geometrie 2“ von Meinhard Hensler (Kantonaler Lehrmittelverlag Luzern, 1979) gefunden.

Beispiele für das Auftreten von regelmäßigen Vielecken bzw. regelmäßigen Teilungen in unserer Umwelt:






9.2 Reguläre Körper

Def. 9.2: Ein Körper (Polyeder) heißt **regelmäßig, regulär** oder **PLATONischer Körper**, wenn gilt:

- Er ist **konvex.**
- Seine **Oberfläche** besteht aus **kongruenten** ....**Vielecken.**
- Seine **Eckenpyramiden** sind **kongruent**, d.h. .... Kanten gehen von jeder Ecke aus, die ....zwischen zwei Nachbarseitenkanten sind gleich.

***Bemerkung** 1: „poly“ ... viel „eder“... Fläche*

Bemerkung 2: Ein Körper heißt **konvex**, wenn für jedes Punktepaar innerhalb des Körpers alle Punkte der Verbindungsstrecke ebenfalls im Inneren des Körpers liegen.

Bemerkung 3: Benannt werden diese Körper meist nach **PLATON** (429 - 348 v.Chr., griechischer Philosoph und Förderer mathematischer Forschung). PLATON ordnete diese Körper den kosmischen Bestandteilen der Welt zu: Feuer, Luft, Wasser, Erde, Himmelsmaterie

Die Erkenntnisse der Mathematik waren für PLATON Einblicke in das Reich der Ideen; diese galten ihm als Grundlage aller Erkenntnis. Er wünschte, dass der Staat auf jede Weise die mathematische Forschung besonders fördere. Über dem Eingang seiner Schule „Akademie“ soll gestanden haben:

„Es trete kein der Geometrie Unkundiger ein.“

Obwohl es unendlich viele regelmäßige Vielecke gibt, gilt:

Satz 9.1: Es gibt genau fünf PLATONische Körper.

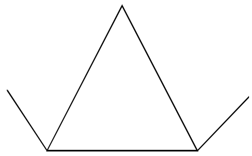
Beweisskizze: Wieviel Flächen müssen mindestens in einer Ecke zusammenstoßen?

....

Wie groß darf die Winkelsumme in einer Ecke maximal sein, um der Forderung nach einer Raumecke und nach Konvexheit zu entsprechen?

....

Welche regelmäßigen Vielecke kommen für die Seitenflächen in Frage?



Regelmäßiges Oberflächen-vieleck	Eckenwinkel	Anzahl der Vielecke in einer Ecke	Winkelsumme in einer Ecke	Name des Körpers
Dreieck				
Viereck				
Fünfeck				
Sechseck				
Siebeneck				

Damit wurde gezeigt, dass es maximal fünf derartige Körper geben kann. (Dass es tatsächlich fünf gibt, zeigen die realen Körper.)

>>> Internetrecherche „Platonische Körper“

>>> empfehlenswert z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_K%C3%B6rper

Bereits EUKLID konnte zeigen (als Abschluss und Höhepunkt seiner „Elemente“), dass es nur diese fünf regelmäßigen Körper geben kann. (Euklid: *Die Elemente.* Buch XIII, § 18a,

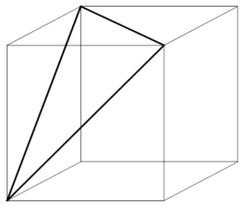
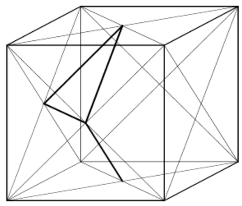
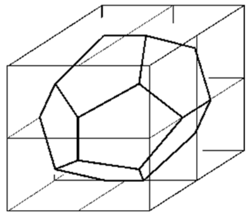
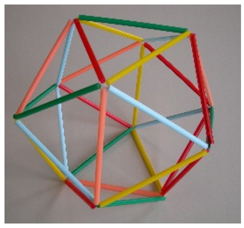
>>> Die Elemente http://www.opera-platonis.de/euklid/

EUKLID schreibt:

Außer den fünf erwähnten Körpern kann kein Polyeder konstruiert werden, das von gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Flächen begrenzt wird.

Im Unterricht werden die Körper idealerweise einem Würfel eingeschrieben. Dieses Einschreiben eröffnet sowohl einen rechnerischen als auch einen konstruktiven Zugang zu diesen Körpern. Sinnvoll erscheint das Herstellen von Modellen (vgl. Ikosaeder aus Plastiktrinkhalmen und Nähgummi) und Darstellung mittels Software.

>>> www.muel.at/geometriemodelle

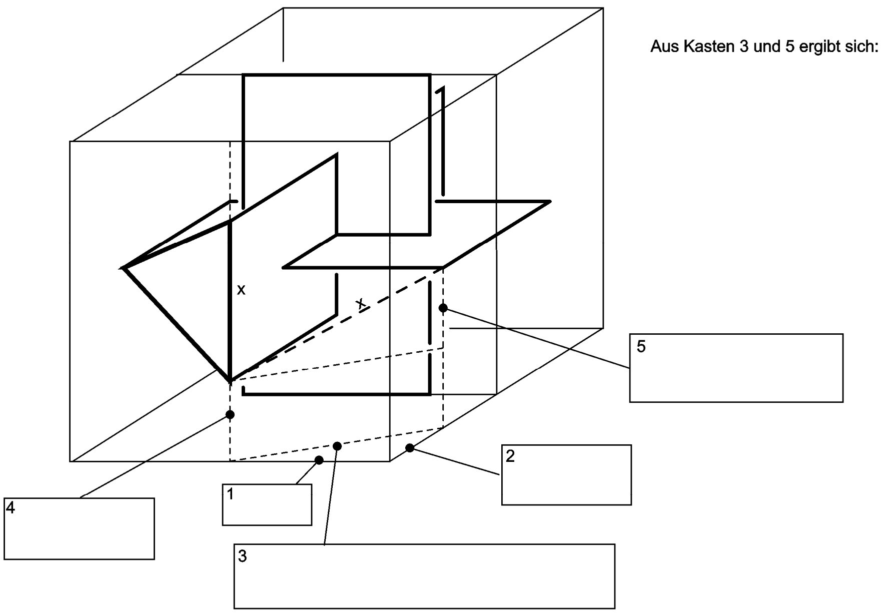





Hinweis: *Johannes KEPLER (1571 – 1630) suchte nach einem Ordnungsprinzip der Welt, weil er glaubte, die Planeten müssten nach einer bestimmten mathematischen Gesetzmäßigkeit um die Sonne kreisen. In seiner Schrift „Mysterium Cosmographicum" veröffentlichte er seine Gedanken darüber. Die In- bzw. Umkugeln der ineinandergeschachtelten Platonische Körper geben das Verhältnis der Bahnradien der Planten wieder. Zu KEPLERs Zeiten waren nur 6 Planeten bekannt. KEPLER hat aber später diese Theorie selbst widerrufen.*

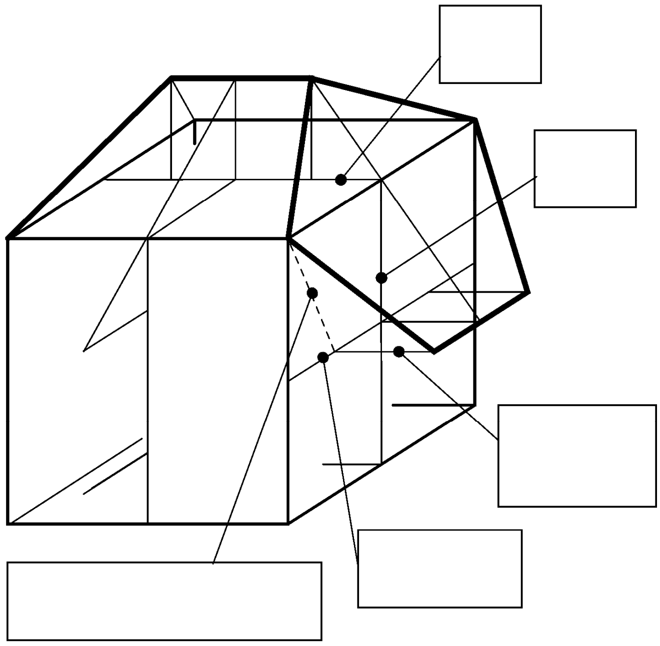
Gemeinsame Eigenschaften aller fünf Körper: (ohne Beweis)

- Alle Ecken liegen jeweils auf einer **Umkugel**.
- Alle Flächen berühren jeweils eine **Inkugel**.
- Alle Kanten berühren jeweils in ihren Halbierungspunkten die **Kantenkugel**.
- Alle drei Kugeln haben ihren Mittelpunkt im **Mittelpunkt** des Körpers.
- Das **Volumen** wird durch untereinander kongruente regelmäßige Pyramiden aufgefüllt.

Aufgabe 9.3: Die zwölf Eckpunkte der drei ineinander verschachtelten Rechtecke sollen die Ecken eines regelmäßigen Ikosaeders werden, welches dem Würfel mit der Kantenlänge a eingeschrieben ist. Wie groß muss die kurze Seite x jedes Recktecks gewählt werden, damit auch die eingetragene Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte gleich x ist? Hilfe: Folgen Sie bei der Berechnung den nummerierten Feldern.

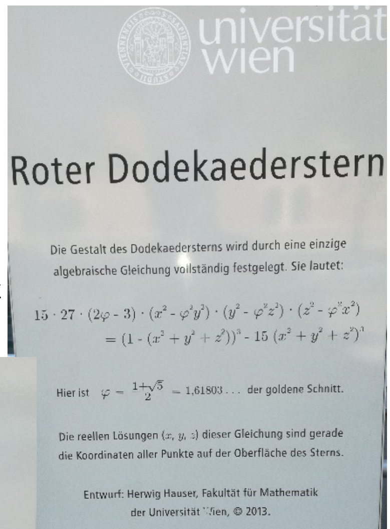


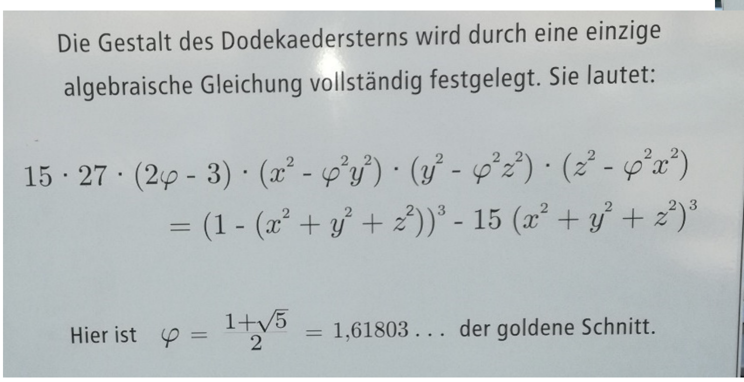
Aufgabe 9.4: Einem Würfel mit Kantenlänge a werden auf den Seitenflächen Walmdächer verschränkt aufgesetzt (vgl. Skizze). Dabei sollen die fünf Dachkanten (First und die vier Traufen) gleich lang (=s) sein. Wie groß muss s im Verhältnis zu a gewählt werden, dass – wie angedeutet – tatsächlich ebene regelmäßige Fünfecke aus jeweils zwei Flächen angrenzender Walmdächer entstehen?



Die Mineralform eines **PYRIT** ist ein Pentagondodekaeder.

Vor der Fakultät für Mathematik der Univ. Wien…



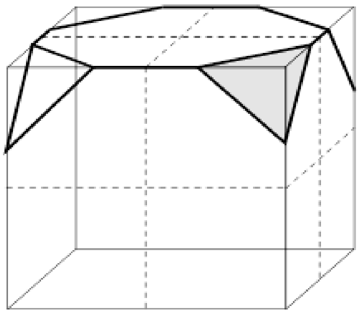


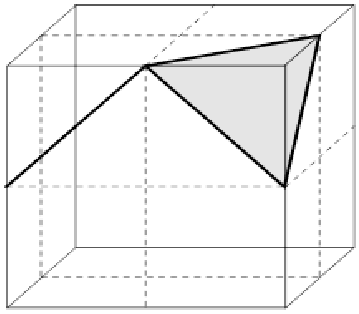
9.3 Halbreguläre Körper

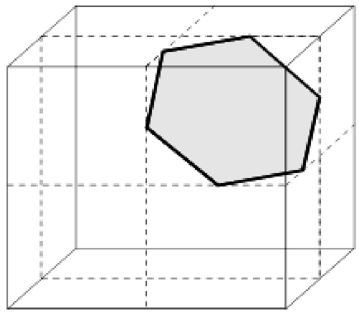
Neben den PLATONischen Körpern gibt es auch solche, deren Oberfläche sich aus zwei oder drei verschiedenen regelmäßigen Vielecken zusammensetzt. Diese heißen **ARCHIMEDische** oder **halbreguläre Körper**. Es gibt 13 dieser Körper (ohne Beweis).

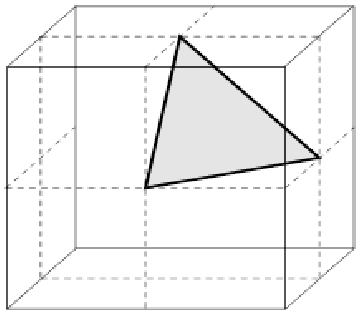
Man erhält diese Körper etwa durch **Abschleifen von Ecken oder Kanten** aus den PLATONischen Körpern. Geht man z.B. vom Würfel aus, so kann man bereits eine Reihe von Körpern erhalten:

* Würfelstumpf
* Kuboktaeder
* Oktaederstumpf
* Oktaeder
*









Analog kann man statt eines Würfels die anderen regulären Körper als Ausgang für das Abschleifen nutzen …

z.B. → Ikosaederstumpf (→ oft Basis für Lederfußball)

>>> de.wikipedia.org/wiki/Archimedischer_Körper

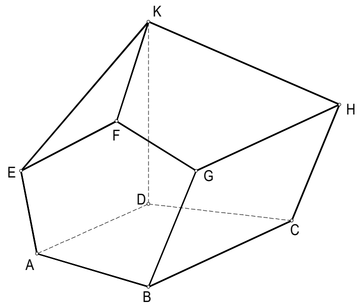
Dass diese Körper auch in der Mineralogie eine Rolle spielen, muss nicht extra erwähnt werden.

Aufgabe 9.5:
Wie groß sind die Winkel der Eckenpyramiden beim Ikosaederstumpf?

9.4 Der EULERsche Polyedersatz

Satz 9.2: Für jedes konvexe Polyeder gilt **e + f – k = 2**

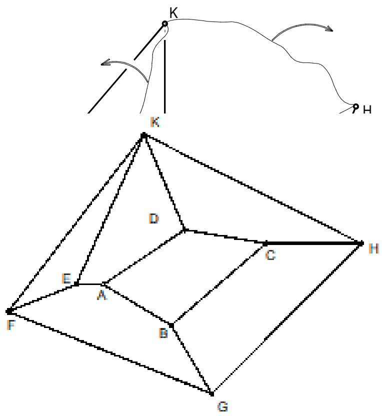
Leonhard EULER (1707 – 1783, Beweispubl. 1758)



Beweisskizze: (Dank an Manfred KATZENBERGER, Wolfsberg)

a) In einem konvexen Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten stellen wir uns die Kanten als elastische Fäden und die Oberfläche als elastische Haut vor. Wir beobachten, wie sich der Term T(e,f,k) = e + f – kverhält, wenn man die Oberfläche Schritt für Schritt abbaut.

b) Eine Seitenfläche (hier FGHK) wird entfernt und die restlichen Seitenflächen werden an den Kanten in die Basisfläche „ausgebreitet“. Dabei entsteht eine Art von „Netz“ des Polyeders, wobei sich die Werte von e und k nicht ändern.

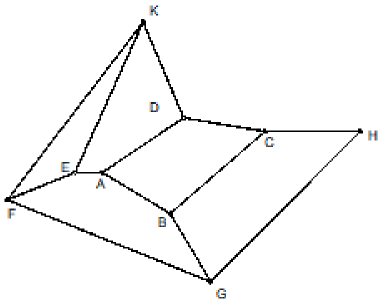


c) Zählt man die Fläche außerhalb des „Netzes“ anstelle der entfernten Seitenfläche, so ändert sich auch f nicht. Der Wert des Termes T(e,f,k) = e + f – k ist somit beim „Netz“ und beim Polyeder gleich.

d) Wird eine Kante am Rand des „Netzes“ entfernt, dann werdengleichzeitig die Flächenzahl f und die Kantenzahl k um jeweils 1 vermindert. Die Eckenzahl e bleibt unverändert. Der Wert des Terms e + f – k bleibt unverändert, denn es gilt:

$$e+(f-1)-(k-1)=e+f-1-k+1$$

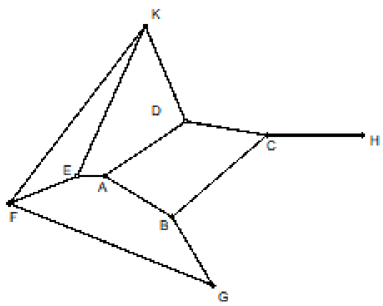
$$\underline{=e+f-k}$$



e) Werden also Kanten am Rande des „Netzes“ entfernt, ändert sich der Wert des Terms e + f – k nicht. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass eine Ecke nur noch mit einer einzelnen Kante verbunden ist. Wird dieser Eckpunkt und diese entsprechende Kante entfernt, dann werden die Ecken e und die Kanten k jeweils um 1 vermindert. Der Term e + f – k bleibt wieder unverändert, da gilt:

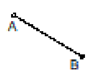
$$(e-1)+f-(k-1)=e-1+f-k+1$$

$$\underline{=e+f-k}$$



f) Wird das „Netz“ schrittweise wie in den Punkten d) und e) erklärt abgebaut, so bleibt schlussendlich eine einzige Kante übrig. Es gilt dann:

e + f – k = $2+1-1\,\underline{=2}$

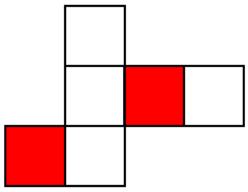


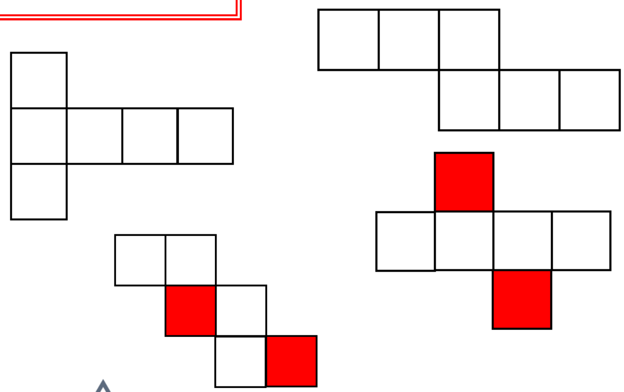
Da im Verlauf des Vorganges der Wert vom Term e + f – k stets Unverändert blieb, gilt: e + f – k = 2 q.e.d.

9.5 Ergänzung: „Wovon noch die Rede sein könnte?“

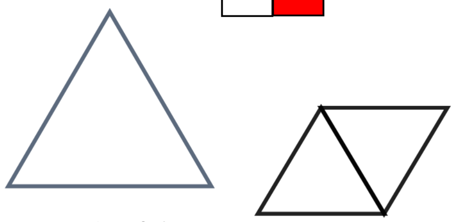
Von der Oberfläche der Körper ... Netze …

Würfel: 11 mögliche Netze aus Quadraten

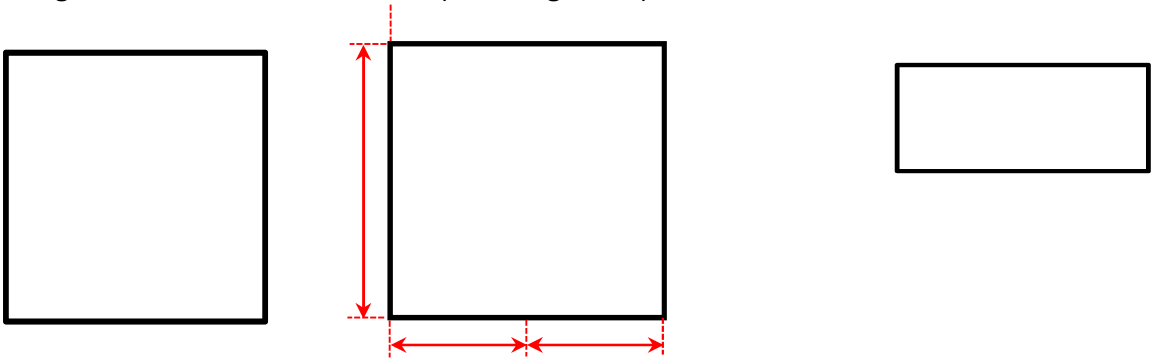




Tetraeder: Netze aus gleichseitigen Dreiecken



Aufgabe: Aus einem Quadrat ein (nicht reguläres) Tetraeder falten?

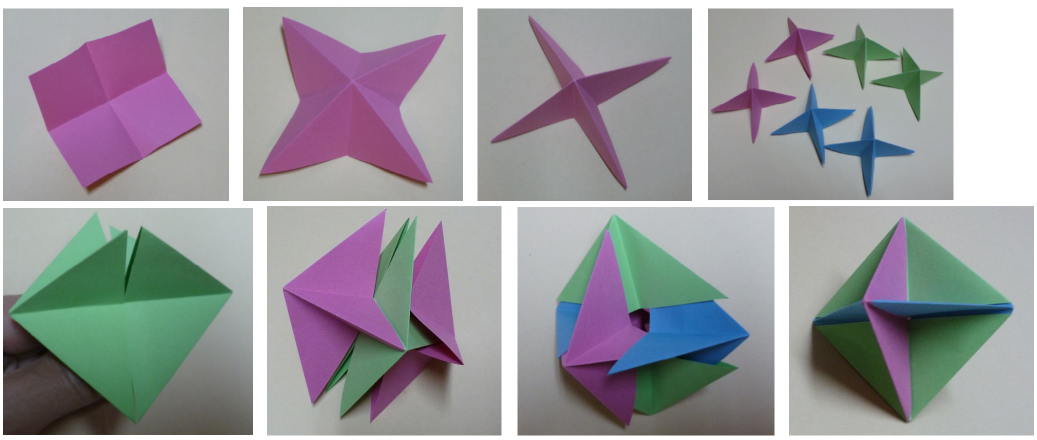


Aus dem Inneren der Polyeder …

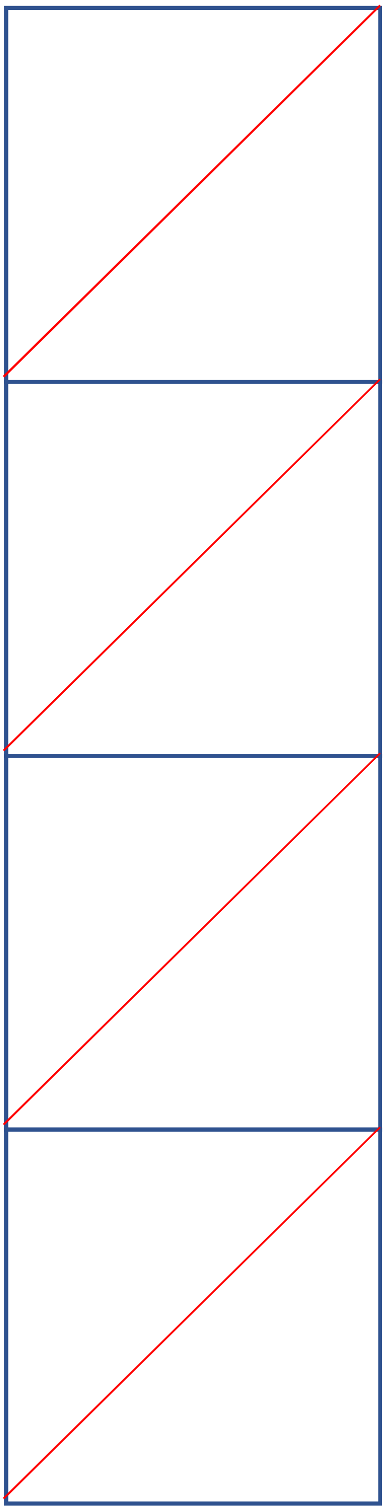
Bsp. 1 Skelettoktaeder, vgl. z.B. Geometrie Wanderworkshop

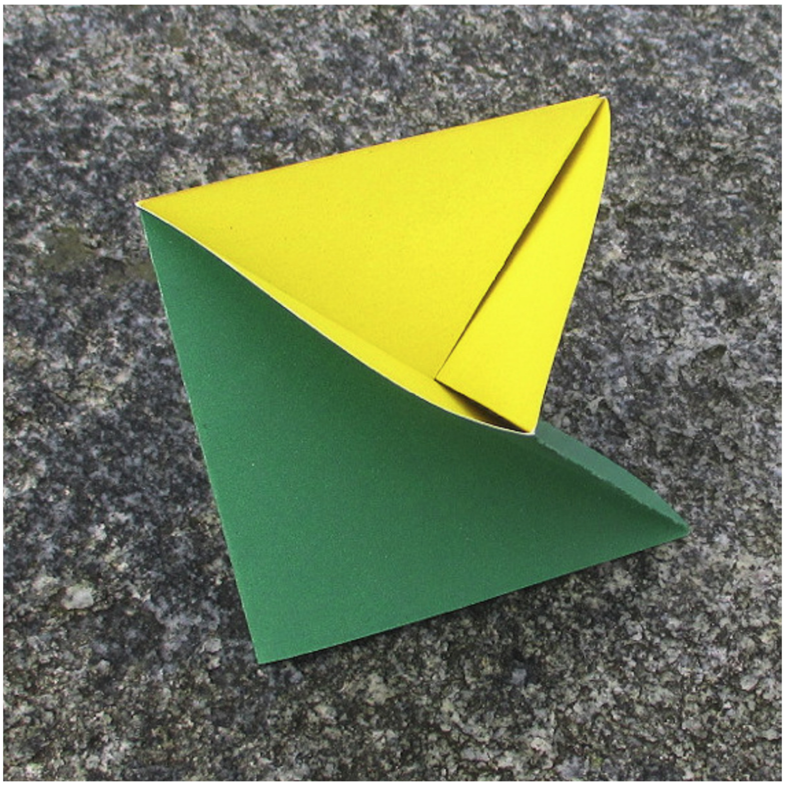
www.geometry.at/wanderworkshop

Benötigt werden 6 Quadrate und folgende Falt-und Steckvorgänge



Bsp. 2: Streifen für ein Oktaeder … aus: [WALSER 2018]





Vgl. dazu „Drehschütte“: Übung 11.1

Kurze blaue Kanten >>> Bergfalten
Rote Diagonalen >> Talfalten
Wir falten wir längs der kurzen (blauen) Faltkanten zum Mantel eines dreiseitigen Prismas zusammen und fixieren allenfalls provisorisch die beiden überlappenden Quadrate mit einer Büroklammer. Die Büroklammern können nach dem Zusammenbau wieder entfernt werden. Dabei ist zu beachten, dass die diagonalen Faltkanten nach innen weisen. Sanfter Druck an den Diagonalkanten nach innen ergibt das Modell

DEMAINE, Erik: Folding an Unfolding, Dissertation, Waterloo, Ontario, Canada, 2001
http://etd.uwaterloo.ca/etd/eddemaine2001.pdf
O'ROURKE, Joseph: Folding Polygons to Convex Polyhedra, Yearbook 2014, http://www.howtofoldit.org/
WALSER, Hans (2018):
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Schraegkanten-Modelle/Schraegkanten-Modelle.pdf

10. Anhang

https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_abs.html
bzw.
https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_nms.html besonders Anlage 1 / Seiten 54 - 62
mit dem für diese LV wichtigen Vorsatz

Sofern Geometrisches Zeichnen nicht als eigener Unterrichtsgegenstand geführt wird, sind im Unterricht von Mathematik die Grundzüge des Unterrichtsgegenstandes Geometrisches Zeichnen zu vermitteln.

Geometrisches Zeichnen Seite 62 - 65

10.1 Aus dem Lehrplan Mathematik (AHS-Unterstufe / NMS)

Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte:

Geometrie: mit grundlegenden geometrischen Objekten und mit Beziehungen zwischen diesen Objekten vertraut werden, zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können, räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen durchführen können, geeignete Sachverhalte geometrisch darstellen und umgekehrt solche Darstellungen deuten können.

Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln:

- Produktives geistiges Arbeiten …
- Argumentieren und exaktes Arbeiten …
- Kritisches Denken …

Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule:

Der Mathematikunterricht soll folgende miteinander vielfältig verknüpfte Grunderfahrungen ermöglichen:

- Erscheinungen der Welt um uns in fachbezogener Art wahrzunehmen und zu verstehen;
- Problemlösefähigkeiten zu erwerben, die über die Mathematik hinausgehen.

Diese Grunderfahrungen sollen zur Entwicklung von Verantwortungsbewusstsein den Mitmenschen und der Umwelt gegenüber führen und zur Erkenntnis beitragen, dass Phänomene und Bereiche existieren, die unabhängig von der augenblicklichen Befindlichkeit des Menschen sind (rationale Distanz).

Lehrstoff:

Kernbereich

1. Klasse

1.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern - ausgehend von Objekten der Umwelt durch Idealisierung und Abstraktion geometrische Figuren und Körper sowie ihre Eigenschaften erkennen und beschreiben können, - aufbauend auf die Grundschule Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewinnen, - Skizzen von Rechtecken, Kreisen, Kreisteilen, Quadern und ihren Netzen anfertigen können, - Zeichengeräte zum Konstruieren von Rechtecken, Kreisen und Schrägrissen gebrauchen können, - Maßstabszeichnungen anfertigen und Längen daraus ermitteln können;

- Umfangs- und Flächenberechnungen an Rechtecken (und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren), - sowie Volums- und Oberflächenberechnungen an Quadern (und einfachen daraus zusammengesetzten Körpern) durchführen können, - Formeln für diese Umfangs-, Flächen- und Volumsberechnungen aufstellen können;

- Winkel im Umfeld finden und skizzieren, - Gradeinteilung von Winkeln kennen, - Winkel mit dem Winkelmesser (Geodreieck) zeichnen können;

- einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können

2. Klasse

2.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern - Dreiecke, Vierecke und regelmäßige Vielecke untersuchen, wesentliche Eigenschaften feststellen, - die Figuren skizzieren und konstruieren können, - Erkennen, ob Angaben mehrdeutig sind oder überhaupt nicht in Konstruktionen umgesetzt werden können, - kongruente Figuren herstellen können, die Kongruenz begründen können;

- Eigenschaften von Strecken- und Winkelsymmetralen kennen, - und für Konstruktion anwenden können;
- Flächeninhalte von Figuren berechnen können, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen, - Volumina von Prismen berechnen, möglichst in Anwendungsaufgaben

3. Klasse

3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern - Vergrößern und Verkleinern von Figuren, - ähnliche Figuren erkennen und beschreiben;

- Formeln für Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken begründen und damit Flächeninhalte berechnen können, - Umkehraufgaben lösen können, - Gegenstände, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, zeichnerisch darstellen können, - Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht von Gegenständen, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, berechnen können;
- den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können.

4. Klasse

4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern - den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern nutzen können, - eine Begründung des Lehrsatzes des Pythagoras verstehen, - Berechnungsmöglichkeiten mit Variablen darstellen können;

- Schranken für Umfang und Inhalt des Kreises angeben können, - Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können, - Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen herleiten und anwenden können;
- Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können.

Besonders wichtig und hilfreich scheinen die

Didaktischen Grundsätze:

Jahresplanung: Aufbauend auf die Grundschule ist der weitere Bildungserwerb unter besonderer Berücksichtigung der Kenntnisse und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler zu planen und durchzuführen. Unter Berücksichtigung der Schulplanung sind in der Jahresplanung die Ziele und Inhalte sowohl von Kern- als auch Erweiterungsbereich zeitlich anzuordnen und zu gewichten (siehe auch Abschnitt „Kern- und Erweiterungsbereich" im dritten Teil).

In der Jahresplanung ist ein Freiraum für Bedürfnisse von Schülergruppen vorzusehen, in dem Interessensschwerpunkte der Schülerinnen und Schüler Berücksichtigung finden, insbesondere wenn regionale, schulische oder berufsvorbereitende Erfordernisse dies nahe legen. Wesentliche Orientierungsmerkmale für die Jahresplanung sind die Abgrenzung von Kern- und Erweiterungsbereich sowie die für das Ende der 4. Klasse angestrebten Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler.

Systematisches und situationsbezogenes Lernen, verständnisvolles Lernen: Ein konstruktives Verhältnis der Schülerinnen und Schüler zur Mathematik soll gefördert werden. Verständnisvolles Lernen ist ein individueller, aktiver und konstruktiver Prozess. Die Schülerinnen und Schüler sind nicht Konsumierende eines fix vorgegebenen Wissens, sondern Produzierende ihres Wissens, mit Betonung auf aktives Erarbeiten, Erforschen, Darstellen, Reflektieren. Mathematische Begriffe und Verfahren werden durch die eigenen Aktivitäten von den Schülerinnen und Schülern in ihr Wissenssystem eingebaut. Im Unterricht ist eine Balance zwischen systematischem Lernen und situationsbezogenem Lernen im praktischen Umgang mit lebensweltlichen Fragestellungen herzustellen.

Unterrichtsformen: Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit und projektorientierter Unterricht sollen die bestimmenden Unterrichtsformen des Mathematikunterrichts sein. Schriftliche Darstellungen von Lösungswegen sollen erst dann angeboten werden, wenn sich die Schülerinnen und Schüler mit einer Aufgabe - zumindest teilweise auseinander gesetzt haben. Auch bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern ist handlungsorientiert vorzugehen. Keinesfalls darf der Unterricht auf das Erlernen von Verfahren und Fertigkeiten beschränkt werden.

Motivierung der Schülerinnen und Schüler: Mit Hilfe von Problemstellungen aus Themenkreisen, die den Erfahrungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler entsprechen, sollen mathematisches Wissen und Können entwickelt und gefestigt werden. Dabei soll die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebens- und Wissensbereichen erfahren werden. Wünschenswert für diese Phase ist eine Mitverantwortung durch die Schülerinnen und Schüler. Hilfen oder Informationen sollen dann erfolgen, wenn sie verlangt oder benötigt werden. Selbstständiges Entdecken und Erfolgserlebnisse sind ein wesentlicher Beitrag zur Motivation.

Unterrichten in Phasen, Vernetzung, Querverbindungen: Unter Beachtung der Vorkenntnisse sollen Inhalte in einer ersten Phase nur um einige Gesichtspunkte erweitert, bei einfachen Anwendungen erprobt und erst in einer späteren Phase vertieft und ergänzt werden. Vernetzungen der Inhalte durch geeignete Unterrichtssequenzen und Aufgabenstellungen sind anzustreben. Querverbindungen zu anderen Unterrichtsgegenständen sowie zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sind herzustellen.
Sicherung des Unterrichtsertrages: Die Schülerinnen und Schüler sollen Gedankengänge, die zum Erwerb mathematischen Wissens geführt haben, wiederholen und dabei lernen, erworbenes Wissen zu rekonstruieren, eigenständig darzustellen und auch zu begründen. Üben soll nicht nur auf die Festigung von Fertigkeiten beschränkt bleiben, sondern den Schülerinnen und Schülern sollen auch planmäßig Arbeitsaufträge zur Schulung der mathematischen Grundtätigkeiten erteilt werden. Für die Nachsteuerung des Lernprozesses ist die Beobachtung des Lernfortschrittes notwendig, ohne dass damit ein Notendruck verbunden sein darf.
Individualisierung und Differenzierung (siehe auch Abschnitt „Förderung durch Differenzierung und Individualisierung" im zweiten Teil): Durch Differenzierungsmaßnahmen sollen die Schülerinnen und Schüler entsprechend ihren individuellen Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnissen und Interessen bestmöglich gefördert werden. Zur Bewältigung von mathematischen Alltagsproblemen sollen thematische Schwerpunkte gesetzt werden. Zu solchen Schwerpunktthemen sollen vielfältige mathematische Zugänge und didaktische Einstiegsmöglichkeiten geboten werden. Die Differenzierung und Individualisierung erfolgt unter Berücksichtigung des Arbeitstempos der Schülerinnen und Schüler, durch den methodischen Zugang, nach Umfang und Komplexität der Aufgabenstellung sowie nach dem Anspruchsniveau, das mit der jeweiligen Aufgabenstellung verbunden ist.
Lesen mathematischer Texte, Fachsprache: Ab der 1. Klasse ist darauf Bedacht zu nehmen, dass die Schülerinnen und Schüler sich mit Mathematik auch in Textform auseinander setzen (zB selbstständiges Erarbeiten aus Musterbeispielen und Erklärungstexten). Mathematische Inhalte können etwa durch Üben von Beschreibungen, Erklärungen und Kurzaufsätzen oder Erstellen von Zusammenfassungen unterschiedlich dargestellt werden. Elementare Begriffe, Symbole und Darstellungsformen können zur Beschreibung mathematischer und außermathematischer Sachverhalte sinnvoll verwendet werden. Mit wachsender Geläufigkeit im Umgang mit mathematischer Sprache und Symbolik kann diese Verwendung auch zur Klärung von Begriffen und zur Klärung von logischen Zusammenhängen dienen. Der Nutzen von Nachschlagwerken soll erkannt und der Gebrauch von Formelsammlungen, Tabellen und ähnlichem gelernt werden.
Aufgabenstellungen: Sowohl der Prozess der Problemlösung als auch das Produkt haben eigenständige Bedeutung. Aufgaben sollen nach Möglichkeit so gestellt sein, dass ein Scheitern an einer Teilaufgabe die weitere Bearbeitung nicht völlig unmöglich macht. Aufgaben, die sich auf elementare Tätigkeiten beziehen, und solche mit aufeinander aufbauenden Lösungsschritten sind möglich und wünschenswert. Aufgabenstellungen sind so zu wählen, dass sie in verständlicher Sprache und übersichtlicher Form abgefasst sind, die thematische Verankerung altersadäquat ist und dass ohne Zeitdruck gearbeitet werden kann. Unterschiedliche korrekte Interpretationen sind zu akzeptieren.
Arbeiten mit dem Taschenrechner und dem Computer: Grundsätzlich sind schon ab der 1. Klasse Einsatzmöglichkeiten zur planmäßigen Nutzung von elektronischen Hilfen beim Bearbeiten von Fragestellungen der Mathematik und als informationstechnische Hilfe (in Form von elektronischen Lexika, Statistiken, Fahrplänen, Datenbanken, ...) gegeben. Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen. Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwareadäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen.
Historische Betrachtungen: Den Schülerinnen und Schülern ist an geeigneten Themen Einblick in die Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden zu geben. Sie sollen einige Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen lernen. Die Mathematik soll als dynamische Wissenschaft dargestellt und ihre Bedeutung bei der Entwicklung der abendländischen Kultur gezeigt werden. Die Bedeutung der Mathematik in der Gegenwart soll in den Unterricht einfließen.

10.2 Lehrplan Geometrisches Zeichnen

NMS-Umsetzungspaket https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_nms.html (20170228)
Bundesgesetzblatt BGBL_2012_ii_185 vom 30. Mai 2012, Anlage 1

Vgl. auch auf beim Mathematiklehrplan Seite 54 den für diese LV wichtigen Vorsatz

Sofern Geometrisches Zeichnen nicht als eigener Unterrichtsgegenstand geführt wird, sind im Unterricht von Mathematik die Grundzüge des Unterrichtsgegenstandes Geometrisches Zeichnen zu vermitteln.

GZ ist ein **Pflichtgegenstand** bei Führung eines *„Schwerpunktes, der dem **naturwissenschaftlichen und mathematischen Schwerpunktbereich** zuzuordnen ist.“* (vgl. Stundentafel Seite 19 von 108)

Bei anderen Schwerpunktsetzungen kann **GZ schulautonom** geführt werden, als **Freigegenstand** so-gar von der 1. bis zur 4. Klasse im Umfang von insgesamt 2 bis 8 Wochenstunden. (Seite 21 von 108)

AHS: Pflicht im **Realgymnasium** in der 8. Schulstufe

https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs10_785.pdf?4dzgm2 (20170228)

Bildungs- und Lehraufgabe:

- Richtige Handhabung und Wartung fachspezifischer Werkzeuge, jeweils in Abstimmung mit der Aufgabenstellung;
- Informationsgewinn durch geeignete Ausfertigung graphischer Arbeiten;
- Erkennen von Strukturen und Eigenschaften geometrischer Objekte;
- Erkennen geometrischer Grundfiguren in größeren Zusammenhängen;
- Entwickeln von Objekten durch Transformieren und Modellieren;
- Anwenden geometrischer Grundkenntnisse auf naturwissenschaftliche und technische Problemstellungen;
- Erkennen und Verwenden der Geometrie als Sprache; Einsetzen von Handskizzen als Hilfsmittel bei der Entwurfsarbeit, aber auch als selbstständige Darstellungsform;
- Anwendung geeigneter Abbildungsverfahren;
- Interpretation und Weiterentwicklung geometrischer Darstellungen;
- Anwendung geeigneter Unterrichtssoftware (2D-Systeme, 3D-Systeme).

Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule:

Der Unterricht in Geometrischem Zeichnen verknüpft die Vorstellung von den Erscheinungen der Welt in uns und das Verständnis für Raum und Figur. Diese Grunderfahrungen tragen zur Erkenntnis bei, dass Phänomene existieren, die unabhängig von der augenblicklichen Befindlichkeit des Menschen sind. Die oder der Einzelne gewinnt Gestaltungsfreiheit und kann sein technisches Grundwissen in den Dienst der Gemeinschaft stellen.

Beiträge zu den Bildungsbereichen:

Sprache und Kommunikation:

Sprache als Kommunikationsmittel für das Beschreiben und Erklären geometrischer Objekte und Vorgänge, die Zeichnung als Sprache der Technik, Präzision im sprachlichen Ausdruck; Zeichnungen als Mittel der interkulturellen Verständigung.

Mensch und Gesellschaft:

Vorbereitung auf die Berufswelt (z.B. zweckentsprechender Einsatz von Werkzeugen), die Vorteile von
Gründlichkeit und Ordnung erkennen.

Natur und Technik:

Erfassen, Strukturieren, Modellieren geometrischer Objekte, Erfassen und Diskutieren von Bewegungsvorgängen und Transformationen im Raum, Raumvorstellungs- und Intelligenztraining.

Kreativität und Gestaltung:

Individuelles Gestalten von geometrischen Objekten und Modellen, kreatives Lösen von geometrischen Problemstellungen, einen angemessenen Anspruch an Sauberkeit und Genauigkeit graphischer Ausfertigung entwickeln; Endausfertigung von Zeichnungen nach ästhetischen Gesichtspunkten.

Gesundheit und Bewegung:
Entwicklung der Feinmotorik.

Didaktische Grundsätze:

Der Unterricht soll auf die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler ausgerichtet sein; d. h. der rezeptive Anteil ist auf die Vermittlung grundsätzlicher Überlegungen und einführende Unterrichtssequenzen zu beschränken.
Abgesehen von ausdrücklich streng gefassten Arbeitsaufträgen soll solchen Aufgaben, die die Kreativität und selbstständige Gestaltungskraft der Schülerinnen und Schüler anregen, der Vorzug gegeben werden.
Die Freihandskizze ist als ein unverzichtbares Hilfsmittel bei der Entwurfsarbeit, aber auch als selbstständige Darstellungsform einzusetzen.
Beim Einsatz von CAD-Systemen ist auf die Verfügbarkeit geeigneter Arbeitsmittel zur Einzel- oder Partnerarbeit hinzuwirken. Dabei ist auf die sachgerechte und intelligente Nutzung zu achten.
Die Konstruktion auf dem Zeichenblatt soll durch Modelle und andere Hilfsmittel, die der Entwicklung der Raumanschauung dienen bzw. die geometrischen Hintergründe deutlich machen, begleitet werden.
Bei der Behandlung von Raumobjekten sollen Aussagen über geometrische Inhalte und Beziehungen vorwiegend aus der jeweiligen Raumsituation entwickelt werden.
Bei der Abbildung von Raumobjekten soll stets exakt zwischen einer Betrachtung der Raumsituation und einer Beschreibung des Bildes unterschieden werden.
Es ist größter Wert auf Genauigkeit und Sauberkeit zu legen. Der graphischen Gestaltung der Arbeiten kommt - abgestimmt auf die jeweils verwendete Ausfertigungstechnik - besondere Bedeutung zu.
Auf Anwendung der Fachsprache ist zu achten.
Die Schülerinnen und Schüler sind zu einer geeigneten Form der Dokumentation der Unterrichtsarbeit anzuhalten.

Lehrstoff:

Kernbereich:

3. Klasse:

Ebene Geometrie:
Kennenlernen und Anwenden von geometrischen Grundelementen und Grundstrukturen.
Eigenständiges Gestalten von Ornamenten und Mustern. Spielerisches Experimentieren.
Anwendung von 2D-Systemen.

Axonometrische Darstellungen ebenflächig begrenzter geometrischer Körper:
Kartesisches Koordinatensystem.
Spezielle axonometrische Darstellungen; Sichtbarkeitsüberlegungen.
Ebene Schnitte, einfache Verschneidungen.
Einführung in ein geeignetes 3D-System.
Modellierungsvorgänge; Beispiele aus Alltag, Architektur, Technik.
Erkennen räumlicher Zusammenhänge.

Hauptrisse:
Grund-, Auf- und Kreuzriss: Herstellen und rekonstruierendes Lesen solcher Risse.

4. Klasse:

Mehrbilderverfahren:
Seitenrisse als Darstellungsmittel und Konstruktionshilfe: wahre Länge; wahre Gestalt.
Werkzeichnungen; Bemaßung; Maßstab.

Perspektive:
Grundeigenschaften und ihre Anwendung auf einfache Darstellungen.

Ellipse:
Anschauliche Erzeugung; Eigenschaften; Anwendungen.

Krumme Flächen:
Beispiele, Darstellungsskizzen; Betrachtung und Darstellung: Drehzylinder, Drehkegel, Kugel.
Modellierungsvorgänge; Annäherung im Rahmen geeigneter 3D-Systeme.

Erweiterungsbereich:

Die Inhalte des Erweiterungsbereichs werden unter Berücksichtigung der Bildungs- und Lehraufgabe sowie der Didaktischen Grundsätze festgelegt (siehe den Abschnitt „Kern- und Erweiterungsbereich" im dritten Teil).

10.3 GZ im Mathematikunterricht?

Ausschnitt aus dem Lehrplan MATEHMATIK für die Neuen Mittelschulen

NMS-Umsetzungspaket

https://www.bmbf.gv.at/schulen/recht/erk/bgbla_2012_ii_185_anl1_22513.pdf?4dzi3h (20170228)

Bundesgesetzblatt BGBL_2012_ii_185 vom 30. Mai 2012, Anlage 1 (Lehrplan Math., Seite 52 von 108)

sowie der Didaktischen Grundsätze festgelegt (siehe den Abschnitt „Kern- und Erweiterungsbereich" im dritten Teil).

MATHEMATIK

Sofern Geometrisches Zeichnen nicht als eigener Unterrichtsgegenstand geführt wird, sind im Unterricht von Mathematik die Grundzüge des Unterrichtsgegenstandes Geometrisches Zeichnen zu vermitteln.

Bildungs- und Lehraufgabe:

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- in den verschiedenen Bereichen des Mathematikunterrichts Handlungen und Begriffe nach Möglichkeit mit vielfältigen Vorstellungen verbinden und somit Mathematik als beziehungsreichen Tätigkeitsbereich erleben;
- mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind;
- durch Reflektieren mathematischen Handelns und Wissens Einblicke in Zusammenhänge gewinnen und Begriffe bilden;
- in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, wobei sie dazu hingeführt werden sollen, Lernprozesse selbstständig zu gestalten;
- durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben;
- verschiedene Technologien (zB Computer) einsetzen können.

Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte:

Die Schülerinnen und Schüler sollen durch Erwerb und Nutzung grundlegender Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten Einsichten in die Gebiete Arithmetik, elementare Algebra und Geometrie gewinnen.

- Arithmetik: Mit rationalen Zahlen rechnen, Rechenergebnisse abschätzen, elektronische Hilfsmittel benutzen können, Gesetzmäßigkeiten des Rechnens kennen und anwenden können.

www.ris.bka.gv.at

Vergleiche dazu auch die Hinweise und Kommentare unter

http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/themen/detail/gz-in-der-nms.html

(20170228)

10.4 Geometriebereiche im M-Lehrplan der Sek II (Gymn.)

5. Klasse:

Trigonometrie

- Definieren von sin α, cos α, tan α für $0° \leq \alpha \leq 360°$
- Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus-und Kosinussatz)
- Kennenlernen von Polarkoordinaten

Vektoren und analytische Geometrie der Ebene

- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
- Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

6. Klasse:

Analytische Geometrie des Raumes

- Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie, Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit
- Ermitteln von Normalvektoren, Definieren des vektoriellen Produkts
- Beschreiben von Geraden und Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen Schneiden von Geraden und Ebenen, Untersuchen von Lagebeziehungen
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie

7. Klasse:

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen
- Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten
- Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen
- Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen

8. Klasse:

Wiederholung

- umfassendes Wiederholen, Vertiefen und Vernetzen von Stoffgebieten

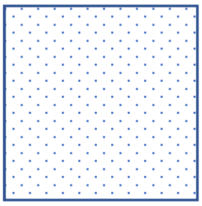
10.5 Poster zu einem Faktorenmodell der Raumvorstellung

Posterdownload >>> http://www.geometry.at/adi/

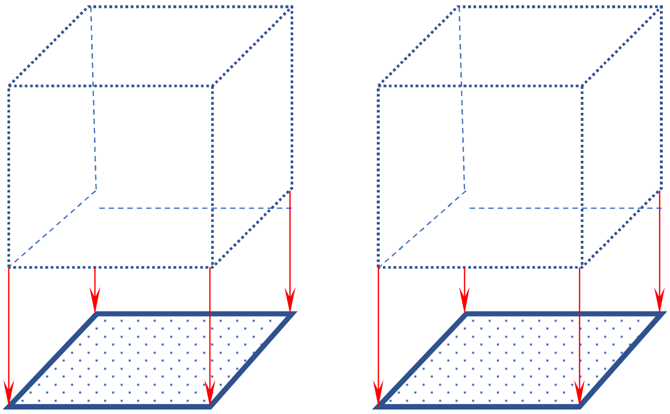
11. Übungen

Aufgabengruppe 0 Projektion – Raumkoordinatensystem - Axonometrie

Aufgabe 0.1:

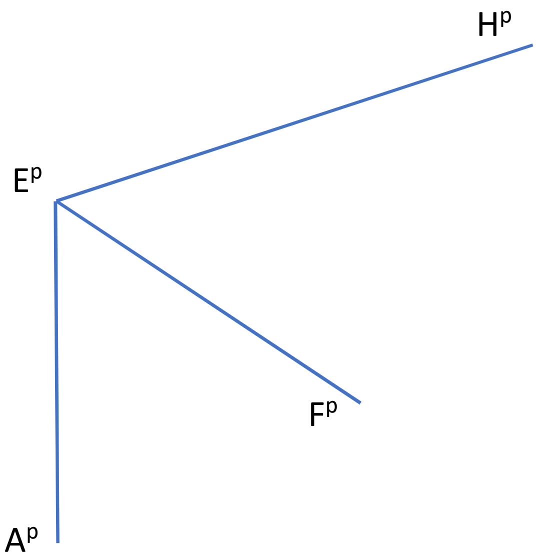


Ein Quadrat ist durch Normalprojektion eines räumlichen Objekts entstanden. Welche Körper können hier außer einem Würfel abgebildet worden sein?
Skizzieren Sie einige davon in den vorgegebenen Parallelrissen innerhalb der Würfelbilder. Achten Sie bitte darauf, dass keine Kantenbilder außer den vier Quadratseiten entstehen.



Aufgabe 0.2:

Ein Würfel ABCD EFGH der Kantenlänge 10 cm soll im Parallelriss dargestellt werden. Dabei sind die verkürzten Bilder der drei vom Eckpunkt E ausgehenden Kanten bereits gezeichnet. Ergänzen Sie das Bild des Würfels. Geben Sie die ungefähren Verzerrungen in den drei Achsenrichtungen an.
Geben Sie die Raumkoordinaten aller Eckpunkte an, wenn A im Ursprung liegt und die x-Achse parallel zu EF, die y-Achse parallel zu EH und die z-Achse in AE liegt.

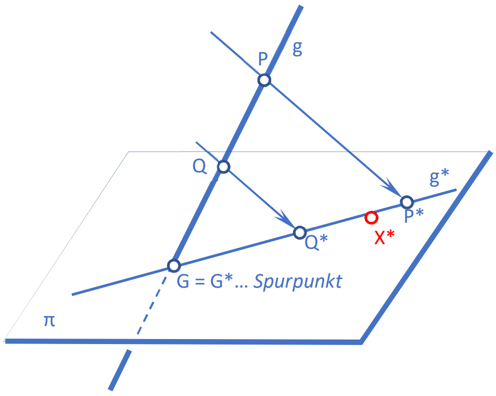


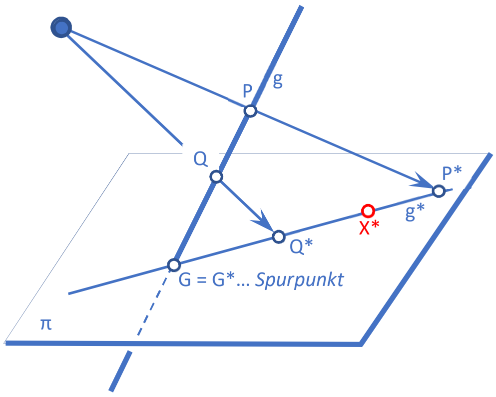
Aufgabengruppe 1 Projektion – Raumkoordinatensystem - Axonometrie

Aufgabe 1.1: Ausnahmefälle zur „Punkt- und Geradentreue“ von Parallel- und Zentralprojektion

a) Welche Geraden erscheinen in den Rissen als Punkte? Zeichnen Sie solche Gerade(n) durch X* ein und beschreiben Sie die Lage in Worten.

Hinweis: Solche Geraden nennt man *projizierende Geraden.*



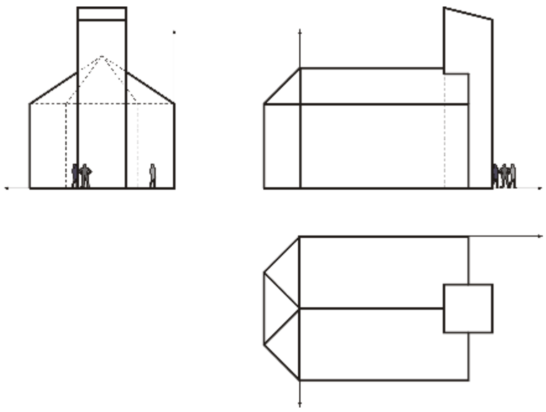


b) Parallelprojektion: Geben Sie an, wie Projektionsrichtung und Bildebene zueinander liegen, wenn Punkte nicht abgebildet werden können.

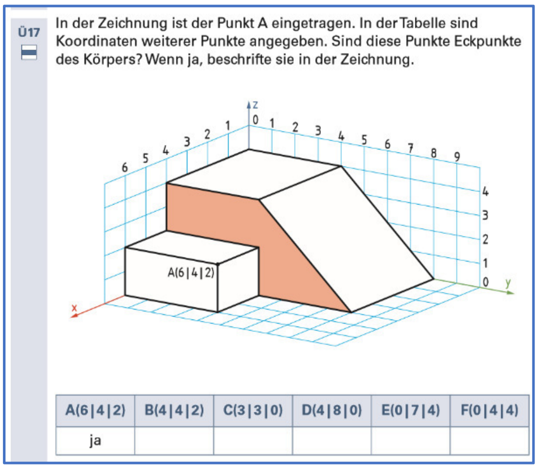
c) Zentralprojektion: Finden Sie Punkte des Raumes, die bei Zentralprojektion kein Bild haben.

Aufgabe 1.2: Raumkoordinatensystem und Mehrtafelprojektion (Grund-, Auf- und Kreuzriss)

a) Kreuzen Sie jene Strecken in Auf-und Kreuzriss an, die im Grundriss nicht in wahrer Länge erscheinen.



b) Bearbeiten Sie die folgende Aufgabe „Ü17“ aus einem GZ-Lehrbuch.

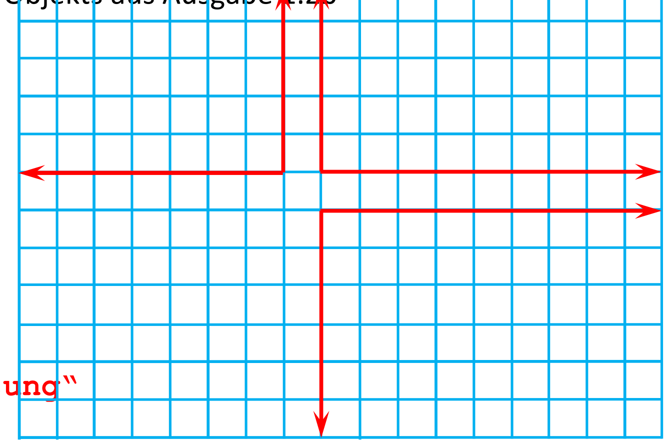


Ü17 In der Zeichnung ist der Punkt A eingetragen. In der Tabelle sind Koordinaten weiterer Punkte angegeben. Sind diese Punkte Eckpunkte des Körpers? Wenn ja, beschrifte sie in der Zeichnung.

A(6|4|2)	B(4|4|2)	C(3|3|0)	D(4|8|0)	E(0|7|4)	F(0|4|4)
ja					

aus BLÜMEL M.; MÜLLER T.; VILSECKER K.: Geometrische Bilder Skizzieren | Konstruieren | Modellieren, www.oebv.at, ÖBV-Verlag, Wien 2012

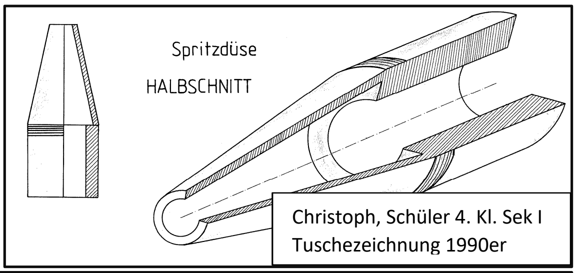
c) Skizzieren Sie Grund-Auf-Kreuzriss des Objekts aus Ausgabe 1.2b



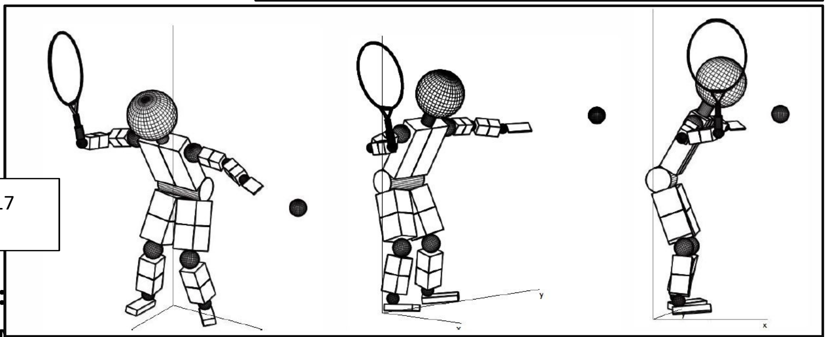
ung“

a) Im Skriptum werden auf Seite 18 die Koordinaten eines Punktes der Votivkirche in Wien angegeben. Berechnen Sie den Abstand dieses Punktes vom Erdmittelpunkt.
b) Wie groß ist seine Entfernung vom Äquator (auf einem Längenkreis gemessen)?

Aufgabe 1.4:
Welchen Leitideen des Raumgeometrieunterrichts könnte man folgende 5 Aufgaben zuordnen?
Aufgabe 1.2
Aufgabe 1.3
Aufgabe 1.5

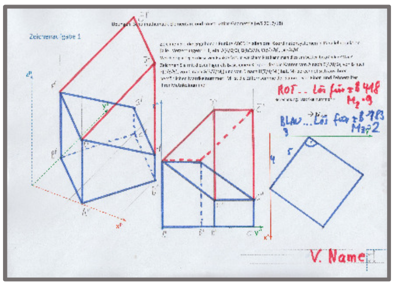


Christoph, Schüler 4. Kl. Sek I
Tuschezeichnung 1990er

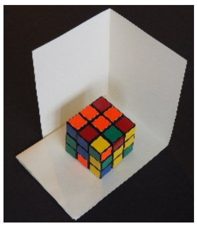


Johanna Pröll, WS 2016/17
Programm GAM

Aufgabe 1.5: Zeichenbeispiel:
Das Ergebnis hängt von Ihrer Matrikelnummer ab, hier sehen Sie zwei mögliche Lösungen (rot und blau) in einer Zeichnung, Ihre kann abhängig von M_z etwas anders aussehen.



Bitte schreiben Sie rechts unten in die vorgegebenen Zeilen Ihren Namen in Blockbuchstaben, aber so, dass rechts davon 2 cm zum Blattrand frei bleibt.
Die Originalangabe wurde mit den Zeichenwerkzeugen von MS-Office (WORD) gezeichnet. Anleitungen dazu finden Sie z.B. unter http://geometrie.muel.at/
Sie können sich diese Originalzeichnung als DOCX von der Lernplattform herunterladen, um die Zeichnung ev. für neue Angaben zu adaptieren.



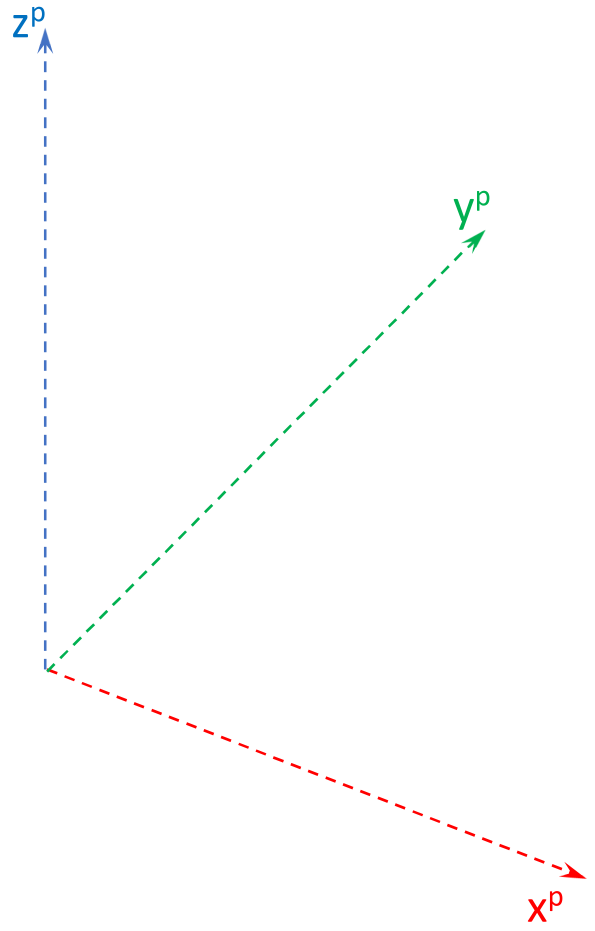
Bonuspunktaufgabe 1.6 (1 Punkt)
Bringen Sie ein A4-Blatt so gefaltet mit, dass man es als Modell für die Raumkoordinatenebenen xy, yz, xz verwenden kann. Wie müssen Sie falten?

Zeichenaufgabe 1

Zeichnen Sie die gegebenen Punkte ABCD in allen drei Koordinatensystemen in Parallelprojektion [alle „Verzerrungen“ = 1] ein: A(4/0/0), B(0/3/0), C(3/7/0), D(7/4/0)

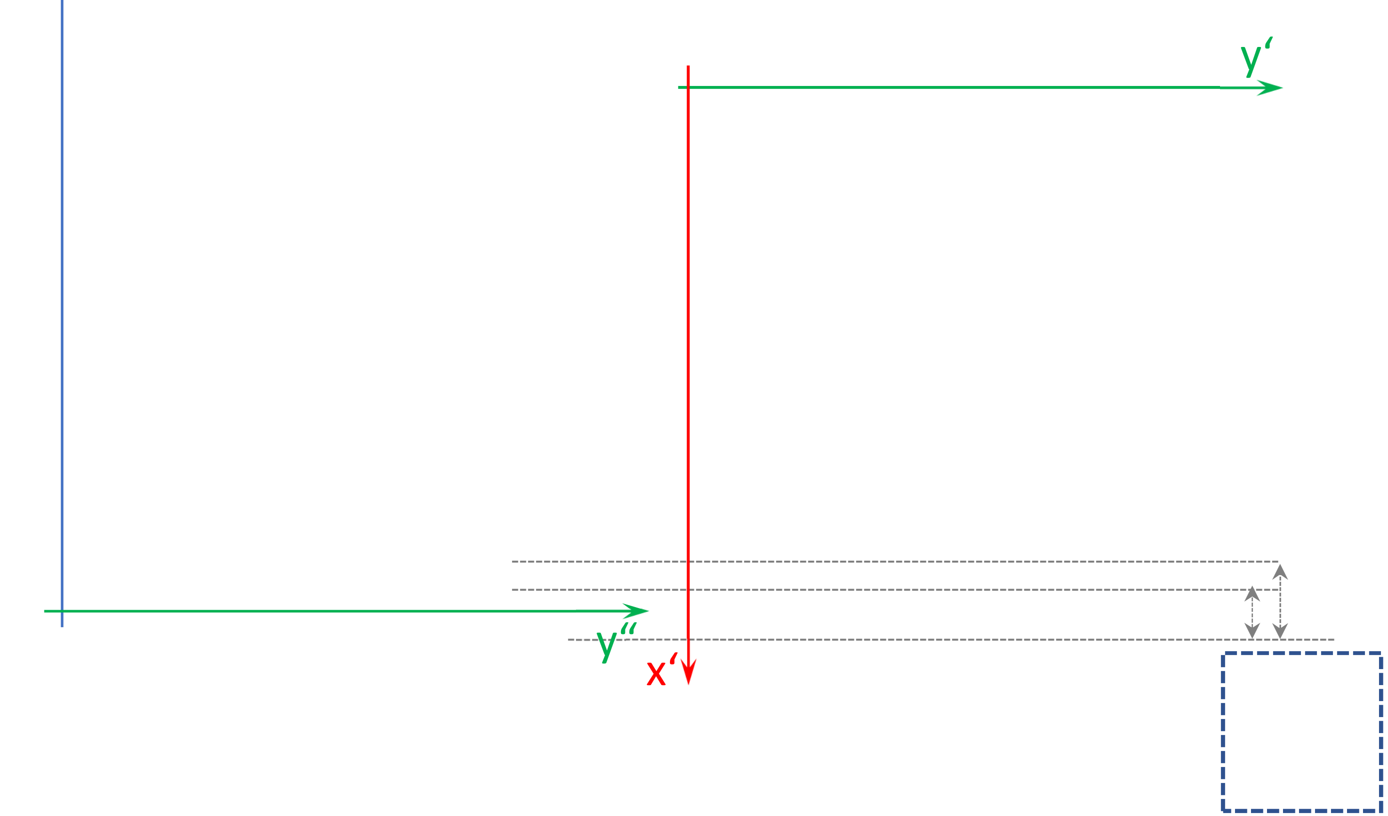
Welche Figur legen diese vier Punkte fest. In welchem Riss kann man dies am besten begründen? Wie?

Zeichnen Sie mit dieser Figur als Basis einen Körper, der die Kanten von A nach E(4/0/5), von B nach F(0/3/5), von C nach G(3/7/M_z) und von D nach H(7/4/M_z) hat. M_z berechnet sich aus Ihrer persönlichen Matrikelnummer: M_z ist die Ziffernsumme der Summe von Einer- und Zehnerziffer Ihrer Matrikelnummer.



Berechnung: Matrikelnummer =

→ M_z =



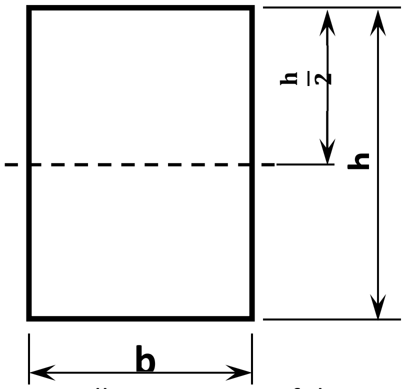
Aufgabengruppe 2 Falten – Raumobjekte – Linienziehen

Aufgabe 2.1: Falten

Falten Sie aus einem Stück chaotischen Papier ein Rechteck, ein Quadrat, ein Dreieck. Dokumentieren Sie schrittweise ähnlich zum Skriptum p 19.

Aufgabe 2.2: Falten

Ein Blatt Papier soll die Eigenschaft haben, dass die zwei Teile nach dem Halbieren dasselbe Seitenverhältnis wie das Ausgangsblatt haben. Berechne Breite b und Höhe h.



$b : h = \frac{h}{2} : b$

➔ …

Zusatzbedingung:

Das Blatt Papier soll 1 m² Fläche haben („DIN A0“). Wie groß sind die Seitenlängen?

Das Halbieren von A0 führt zum Format A1, das Halbieren von A1 zu A2 usf. Wie groß ist demnach ein Blatt A4? Wie viele Blätter A4 erhält man aus einem Bogen A0?

Aufgabe 2.3: Durch Falten zu einigen merkwürdigen Punkten des Dreiecks

Schneiden Sie (allgemeine) Dreiecke aus Papier und demonstrieren Sie die Faltvorgänge, um zumindest drei der folgenden Punkte durch Falten eines allgemeinen Papierdreiecks zu erhalten: Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt. Kleben Sie die konkreten Ergebnisse der Faltungen auf ein A4-Blatt – aber nur mit einer Teilfläche des jeweiligen Dreiecks, sodass die Faltungen, die zum merkwürdigen Punkt geführt haben, nachempfunden werden kann.

Aufgabe 2.4: Relationale Geometrie

Zeigen Sie: Durch einen Punkt führen unendlich viele Geraden. Gehen Sie dabei analog zu den Beweisen der Sätze 2.1 und 2.2 vor, indem Sie sich bei jeder Aussage auf das entsprechende Axiom berufen.

Aufgabe 2.5: Relationen in der Geometrie

a) Ist die <-Relation (vgl. Def. 2.1, p 22 Skript.) *reflexiv* (X < X?) oder *symmetrisch* (X < Y ⇨ Y < X)?

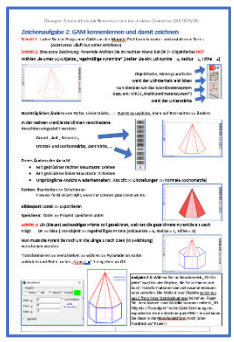
b) Untersuchen Sie, ob die Relation *„… liegen auf derselben Seite von …“* eine *Äquivalenzrelation* (reflexiv, symmetrisch, transitiv) ist.

Def.: Zwei Punkte X ∉ g und Y ∉ g *liegen auf derselben Seite von* g, wenn XY und g keinen Schnittpunkt haben.

Beachten Sie dabei das **Axiom von PASCH** (Moritz PASCH, 1843 – 1930) für die Überlegungen zur Transitivität: Seien X, Y, Z drei Punkte außerhalb einer Geraden g. Schneidet g eine der drei Seiten XY, YZ, XZ, so noch eine weitere.

Aufgabe 2.6: Zeichenbeispiel

Beachten Sie die Anweisungen/Anleitungen sowie die Aufgabenstellung am Beiblatt.

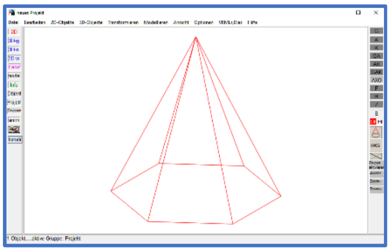


Zeichenaufgabe 2: GAM kennenlernen und damit zeichnen

Schritt 1: Laden Sie das Programm GAM aus der Moodle-Plattform herunter und installieren Sie es. (ACHTUNG: Läuft nur unter Windows.)

Schritt 2: Eine erste Zeichnung: Pyramide >> Wählen Sie dazu im rechten Menü bei **OF** (= Objektfarbe) **ROT**

Wählen Sie unter 3D-Objekte „regelmäßige Pyramide“ [Stellen Sie ein: Eckpunkte = 6, Radius = 1, Höhe = 2]

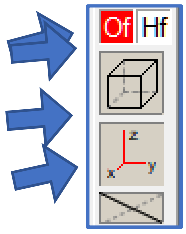


Objektfarbe, Hintergrundfarbe

Wahl der Sichtbarkeit: anklicken

Nun blenden Sie das Koordinatensystem dazu ein: WKS („Weltkoordinatensystem“)

Wahl der Linienstärke

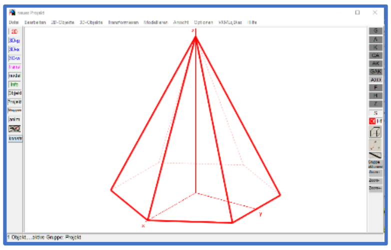


Nachträgliches Ändern von Farbe, Linienstärke, …: Zuerst auswählen, dann auf Bearbeiten >> Ändern

In der rechten Menüleiste können verschiedene Ansichten eingestellt werden:

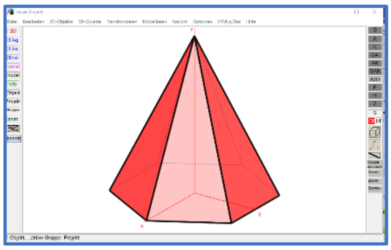
Grund-, Auf-, Kreuzriss,

Frontal- und Horizontalriss, Zentralriss,



Freies Ändern der Ansicht:

- Maus bewegen mit gedrückter rechter Maustaste: Drehen
- Maus bewegen mit gedrückter linker Maustaste: Schieben
- Ursprüngliche Ansicht wiederherstellen: Ansicht >> Einstellungen >> normale Axonometrie



Färben: Bearbeiten >> Schattieren

Hinweis: funktioniert nicht, wenn nur schwarz gezeichnet wurde.

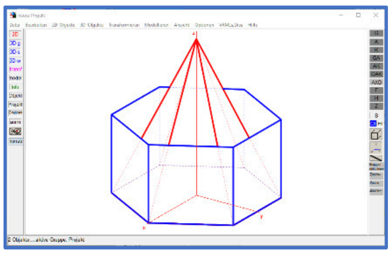
Bildexport: Datei >> Exportieren

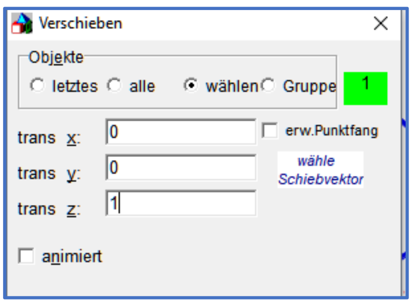
Speichern: Datei >> Projekt speichern unter

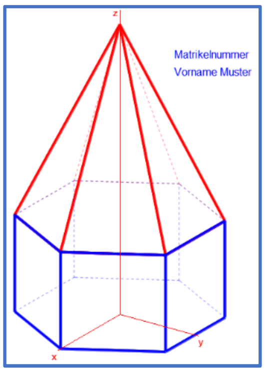
Schritt 3: Ein (blaues) sechsseitiges Prisma soll gezeichnet, welches die gezeichnete Pyramide als Dach trägt: OF >> **BLAU** | 3D-Objekt >> regelmäßiges Prisma [Eckpunkte = 6, Radius = 1, Höhe = 1]

Nun muss die Pyramide noch um die Länge 1 nach oben (in z-Richtung) verschoben werden:

Transformieren >> Verschieben >> wählen >> Pyramide an Kante anklicken und Enter >> bei „trans z =“ 1 eingeben >> OK







Aufgabe 2.5: Wählen Sie im Menübereich „3D-Objekte“ zwei bis vier Objekte, die Sie zeichnen und durch Transformationen sinnvoll zusammenbauen oder verteilen. Die Maße dieser Objekte sollen nur aus Ziffern Ihrer Matrikelnummer bestehen. Fügen Sie Ihren Namen samt Matrikelnummer mittels „3D-Objekte / Textobjekt“ in die GAM-Zeichnung ein, exportieren Sie die Zeichnung als PNG-File und drucken diese zum Abgeben aus. Die Original GAM-Datei laden Sie in die Moodleplattform hoch.

Aufgabengruppe 3 Grundlagen – Messen

Aufgabe 3.1: Anzahlbestimmung

a) In der Zeichenebene seien fünf verschiedene Punkte gegeben. Durch je zwei dieser Punkte wird eine Gerade gezogen. Wie viele solcher Geraden gibt es mindestens / höchstens? Verallgemeinern Sie: Wie sieht die Lösung im Falle von n Punkten aus?
b) Lösen Sie die zu 1) ***dualen Aufgaben***, d.h. tauschen Sie die Worte „Gerade“ und „Punkt“.

Aufgabe 3.2: Längen und Winkeleinheiten **„Geometrie = Erdmessung“**

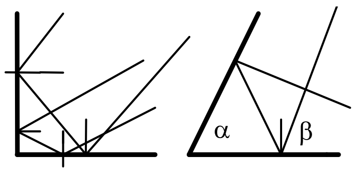
Prüfen Sie nach: 1 m entspricht dem Zehnmillionstel Teil eines *halben Meridianbogens* (= Entfernung Nordpol-Äquator, Erdradius = 6370 km).
Welcher Länge entspricht eine Winkelminute auf einem halben Meridianbogen?

Aufgabe 3.3: Optimierungsaufgabe

a) Gegeben seien zwei Punkte P und Q auf derselben Seite einer Geraden g. Konstruieren Sie einen Punkt S auf g so, dass g mit SP einen Winkel einschließt, der genauso groß ist wie der Winkel zwischen SQ und g. Zeigen Sie, dass der Lösungspunkt S folgende Minimaleigenschaft besitzt: Der Streckenzug PS+SQ ist der kürzeste für alle wählbaren Punkte S auf g.
b) Eine Billardkugel liegt in B(1,5/0). Auf welchen Punkt der Bande RS[R(4/2,5), S(3/4,5)] muss man zielen, um eine andere Kugel in K(0/4) zu treffen? (Kein Drall wird vorausgesetzt!) Die Konstruktion ist verlangt.

Aufgabe 3.4: Anzahlbestimmung

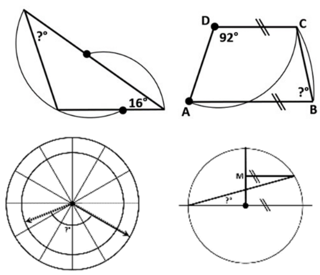
a) Ein Lichtstrahl trifft auf einen "Rechtwinkelspiegel" (vgl. Skizze). Beweisen Sie, dass einfallender und reflektierter Strahl zueinander parallel sind.



Bemerkung: Praktische Anwendung dieser Tatsache (allerdings dreidimensional durch Reflexion an Würfelecken) erfolgt bei Radarabweisern an der Donau. Die aufgestellten Zeichen dienen z.B. zum Anzeigen einer Untiefe, bestehen aus rechtwinkelig verschweißten Blechplatten, sodass die auftreffenden Radarstrahlen, die von den Schiffsradaranlagen ausgesandt werden, auch wieder zum Absender zurückreflektiert werden. (vgl. Moodle-Plattform im Bereich *Schlüsselstelle „Messen“*) Ähnliches (allerdings ebenfalls dreidimensional) beim Rückstrahler beim Rad; "Katzenaugen") oder auf dem Mond abgelegten Laserreflektor, um die genaue Entfernung Erde-Mond aus der Laufzeit des Laserstrahls zu bestimmen.

b) Statt des Rechtwinkelspiegels im vorigen Beispiel hat man nun einen allgemeinen "Winkelspiegel" (vgl. Skizze rechts). Um welchen Winkel hat sich der reflektierte Strahl gegen den eintreffenden Strahl verdreht?

Aufgabe 3.5: „Denksport“ (aus: EIGENMANN, Paul: Geometrische Denkaufgaben. KLETT 1981, vergr.)



Ordnen Sie den vier Denkbeispielen die jeweils richtige Lösung aus der Menge {6 cm, 68°, 66°, 15°, 67,5°, 130°, 63°, 115,5°, 78°, 51°, 27°, 12°, 30°, 60°, 61,5°} zu.

Aufgabe 3.6: Zeichenbeispiel: Zeichnen mit dem Computer mit „Sketchup Make“

Bonuspunktaufgabe 3.7 (1 Punkt) Einen Bonuspunkt gibt es für die Abgabe der Rechnung der Aufgabe 3.3b zu Beginn der Übungsstunde (analytische Geometrie).

Zeichenaufgabe 3: SKETCHUP MAKE kennenlernen und damit zeichnen

Schritt 1: Laden Sie das Programm aus der Moodle-Plattform herunter und installieren Sie es.

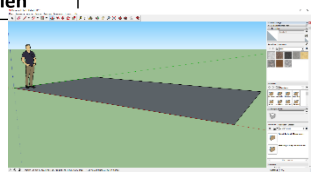
Schritt 2: Quader zeichnen (ACHTUNG: In der Grundeinstellung zeichnet Sketchup einen Zentralriss!)
Bei Start von Sketchup Make wählen Sie am besten die „Einfache Vorlage – Meter“, dann auf „Sketchup verwenden“. Beachten Sie die Menüleiste:

Zum Zeichnen der Angabe

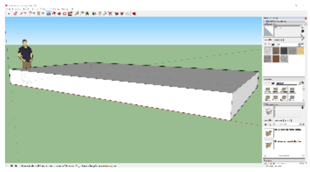
Verändern der Zeichnung

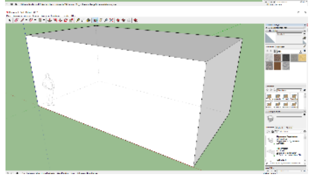
Verändern der Ansicht
Drehen, Schieben
Zoomen (gedrückte linke Maustaste nach oben oder unten ziehen)
Bildschirmfüllen

Sehen Sie sich ev. ein Grundtutorial an, z.B.:
https://www.youtube.com/watch?v=5mR3iyscEOA



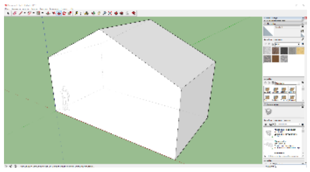
Zunächst ein Rechteck: Klick mit linker Maustaste auf das **Rechtecksymbol**, d Ursprung und mit <u>nicht</u> gedrückter Maustaste nach rechts das Rechteck „aufziehen“. Beobachten Sie dabei ganz rechts unten das unscheinbare Fenster „Abmessungen“. Sobald ein graues Rechteckbild entstanden ist, klicken Sie links und lassen Sie die Maus gänzlich aus (!). Dann tippen Sie einfach (ohne, dass Sie mit der Maus an eine bestimmte Stelle oder gar in das Abmessungsfenster klicken) z.B. ein: 8,5;4,7 ENTER (Das sind Länge und Breite des Rechtecks.)



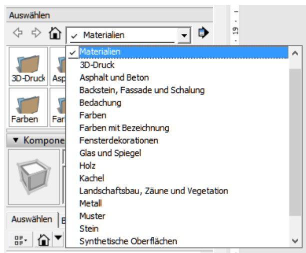


Danach klicken Sie auf das **„Drücken/Ziehen“-Symbol** (Geometer würden dazu „extrudieren“ sagen.), klicken mit linker Maustaste in das Rechteck und ziehen mit <u>nicht</u> gedrückter Taste beliebig weit nach oben, dann Klick mit linker Maustaste (Blick auf das Fenster rechts unten zeigt „Abstand“.) Tippen Sie, ohne die Maus wieder zu berühren z.B. ein: 3,6 ENTER (Das ist dann die Höhe des Quaders.) Klick auf das Bildschirmfüllen-Symbol bringt den gesamten Quader auf den Schirm, Drehen-Symbol klicken und nach unten ziehen könnte ein Bild wie im Screenshot rechts liefern:

Schritt 3: Dach aufsetzen
Klicken Sie auf das Bleistiftsymbol und fahren Sie dann mit der Maus (keine Taste drücken!) die vordere obere (über der roten Achse liegende) Quaderkante entlang. Sobald sich die Farbe des kleinen (rot leuchtenden) Quadrates ändert, erscheint gleichzeitig das Wort „Mittelpunkt“. Dort klicken Sie mit der linken Maustaste, dann fahren Sie annähernd parallel zur grünen Achse nach hinten bis zur parallelliegenden Quaderkante. Klicken Sie nun in das Verschiebesymbol und dann direkt auf die soeben gezeichnete Mittellinie. Dann mit nicht gedrückten Maustasten ein Stück nach oben ziehen, Maus auslassen, eintippen z.B. 2 ENTER. So entsteht ein ***Satteldach***, mit Zoom „Alles zeigen“ den Bildschirm anpassen.



Schritt 4: Optionen

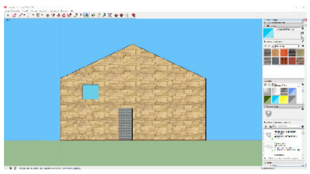


Mit dem Rechtecksymbol können Fenster und Türen eingezeichnet werden, mittels „Drücken/Ziehen“ kann durch Einrücken ein realistischer Eindruck erzeugt werden.

Mit dem Farbeimersymbol können die Wände und Dach gefärbt oder relativ realistisch belegt werden, Türen und Fenster mit Glas belegt werden, Auswahl über das Fenster „Materialien“. Speichern Sie Ihr Objekt!

Schritt 5: Ansichten ändern

Mit dem Menüpunkt „Kamera“ >>> Parallel Projektion“ wird einParallelriss erzeugt. Mit Hilfe von „Kamera >>> Standaransichten“ können Auf-, Kreuz und Grundriss erzeugt werden. Diese müssen über „Datei >>> Exportieren“ separat gespeichert werden. Versuchen Sie z.B. auch Ansicht >>> Flächenstil >>> Drahtgitter



Aufgabe 3.6: Zeichnen Sie ein einfaches Haus eigener Wahl. Die Maße des Objektes <u>sollen nur aus Ziffern Ihrer Matrikelnummer</u> bestehen. Fügen Sie Ihren Namen samt Matrikelnummer mittels „Funktionen / 3D-Text“ an eine Seitenfläche des Hauses ein, exportieren Sie die Zeichnung als PNG-File und drucken diese zum Abgeben aus. Die Original SKP-Datei laden Sie in die Moodleplattform hoch.

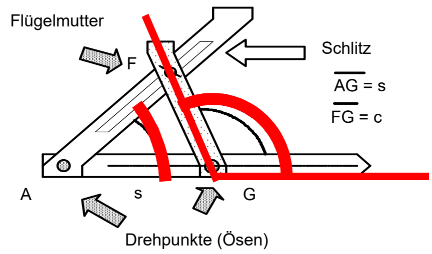
Aufgabengruppe 4 Grundlagen – Messen

Aufgabe 4.1: Axiome der Bildschirmgeometrie

Formulieren Sie die Axiome E1 – E6 und die Sätze 2.1 bis 2.3 so um, dass Sie *Axiome einer Bildschirmgeometrie* (vgl. Skript p 45) sein könnten. Dabei soll die Zeichenebene genau „ein Bildschirm“ sein und „ein Pixel“ einen Punkt darstellen.

Aufgabe 4.2: Flächenformeln

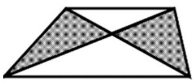
Zeichnen Sie analog zu Aufgabe 3.4 (vgl. Skriptum p 37) ein Fünfeck mit ganzzahligen Koordinaten (bitte wählen Sie nur Ziffern Ihrer Matrikelnummer dazu) und berechnen Sie den Flächeninhalt mit Hilfe der Formel von GAUSS. Führen Sie mit Hilfe der Teilung in Teildreiecke eine Kontrollrechnung durch. (Bereiten Sie diese Aufgabe bitte so auf Papier vor, dass Sie die Zeichnung samt Berechnungen vorweisen können.)



Aufgabe 4.3: Winkelhalbierer

Durch die Schraube in F (im Schlitz des Stabes b (=AF) gleitbar) kann der Schenkel c (=GF) so fixiert werden, dass durch a (= AG) und c im Scheitel G ein gegebener Winkel gebildet wird.
Wie lange muss s (=Abstand AG) gewählt werden, damit der Winkel in A (= <GAF) immer halb so groß wie in G (= Nebenwinkel von AGF) wird?

Aufgabe 4.4a: Flächengleichheit



Zeigen Sie (ohne Rechnung), dass die beiden markierten Dreiecke des allgemeinen Trapezes flächengleich sein müssen.

Aufgabe 4.4b: Relationale Geometrie

Beweisen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass für ein Parallelogramm mit den Diagonalen e, f und dem Umfang u gilt: **u/2 < e+f < u** .
Überprüfen Sie dann diese Ungleichungskette mittels selbst gewähltem Parallelogramm mit konkreten Längen.

Hinweis 1: e<a+b und f<a+b; warum? Addieren Sie.
Hinweis 2: Zeichnen Sie zwei kongruente Parallelogramme nebeneinander.

Aufgabe 4.5: Winkelmessung auf nichtebenen Flächen (nach p 33)

Experiment "Dreieck auf einer gekrümmten Fläche": Es geht um die Winkelsumme im Dreieck. Kleben Sie dazu auf einen Ball, einen Luftballon, eine bauchige Vase oä. mit Klebeband ein Dreieck und bestimmen die Winkelsumme. Dokumentieren Sie dieses Experiment mit den gemessenen Winkelwerten und durch mindestens zwei Fotos, die Sie auf Ihrem Smartphone oder ausgedruckt mitbringen.
Machen Sie dasselbe auf der gekrümmten Mantelfläche eines Zylinders (z.B. Dreieck auf einer Säule).
Wichtig ist bei beiden Experimenten, dass die Dreiecksseiten die kürzesten Verbindungen zwischen den Eckpunkten sind (ev. Gummiband spannen).

Hinweis 1: Ist die Winkelsumme > 180°, so spricht man von einer **elliptisch (oder positiv)** gekrümmten Fläche, ist sie < 180°, so von einer **hyperbolisch (oder negativ)** gekrümmten Fläche.

Hinweis 2: Das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises liefert in der Ebene die Zahl PI. Dieses Verhältnis verändert sich allerdings auf gekrümmten Flächen. Vgl. dazu in der Moodle-Lernplattform Abschnitt 3 „Messen“.

Aufgabe 4.6: Geometrie mit Geogebra 3D

Zeichnen Sie das Prisma aus Aufgabe 1.5 und eine Pyramide (inkl. Netz) mit Geogebra 3D, beachten Sie dazu das Anleitungsblatt *„Zeichenaufgabe 4: Geogebra 3D – Arbeiten mit Raumkoordinaten“.* Laden Sie beide Zeichnungen hoch UND bringen Sie beide Zeichnungen vorzeigbar mit (Ausdruck, Bildschirm z.B. Laptop, Tablett, Handy, …)

Zeichenaufgabe 4: Geogebra 3D – Arbeiten mit Raumkoordinaten

(v5.0.377) Dank an David Stuhlpfarrer, Graz

Zuerst eine Anleitung: Mit Koordinaten in Geogebra 3D zeichnen (Vorschlag)

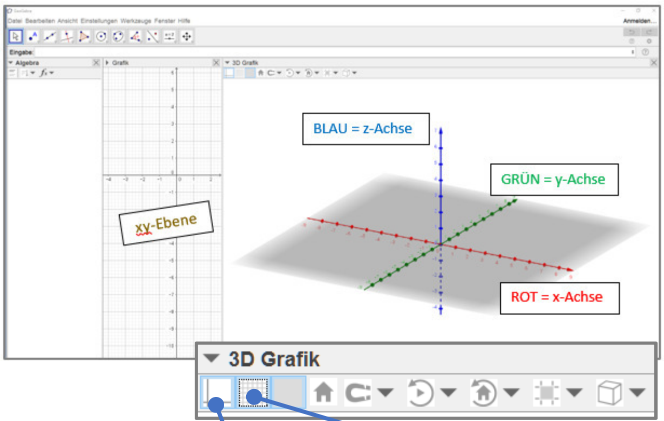
1. Vorbereitungen

Datei neu, öffnen folgender Fenster (<Ansicht>): Algebra, Grafik, 3D Grafik

Optional:
<Einstellungen> → <Einstellungen speichern>

Eingabefenster nach oben verlagern (günstig in der Schule):

<Einstellungen, Erweitert, Layout-Symbol>, hier: Eingabezeilen-Lage verändern



Koordinatenachsen, Rasterung eingeschaltet

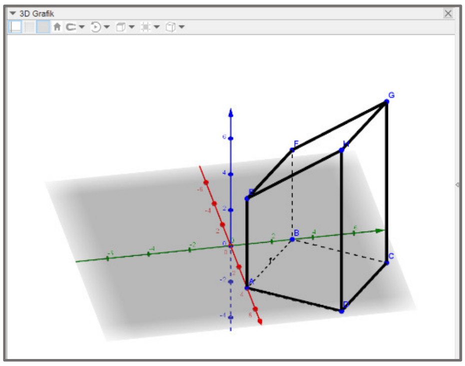
2. Punkte einzeichnen

WIE?

Möglichkeit 1, MAUS:

<Punkt>: durch die eingeschaltete Rasterung gelingt es einfach, Punkte mit ganzzahligen Koordinaten festzulegen. Der Mauscursor wird „magnetisch" von den Gitterpunkten angezogen.

z.B. (4, -3,2) Zunächst mit Mauscursor nach (4, -3), dann linke Maustaste nach oben/unten ziehen.



Möglichkeit 2, EINTIPPEN:

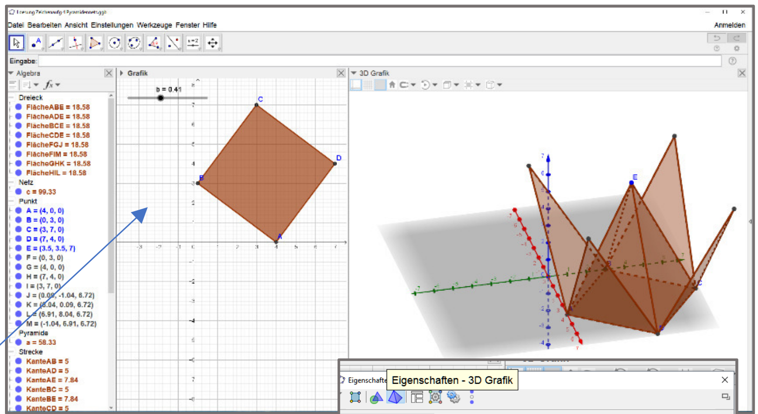
Im Eingabefenster entweder nur die Koordinaten (3, 5, 4) oder mit Bezeichnung P=(3, 5, 4)

3. Dann Punkte durch Strecken verbinden (entsprechend der Sichtbarkeit). Achsen Sie bitte auf höhere Strichstärke, damit das Objekt auch plakativ dargestellt wird.

Die eigentliche Aufgabe: zwei Zeichnungen

Teil A: Prisma aus Zeichenaufgabe 1 (mit individuellen Höhen wie dort beschrieben)

Teil B: Pyramide samt Netz zeichnen



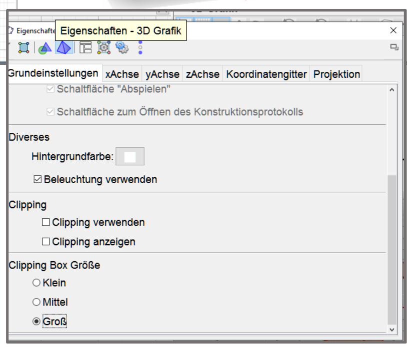
Anleitung zu Teil B:

<Pyramide> Basisfigur (gleiche Angabe wie bei Prisma in Teil A) in xy-Ebene einzeichnen, dann zum Mittelpunkt des Quadrats gehen (eingeben oder anklicken), hier linke Maustaste, Spitze in richtige Höhe (=M_Z aus Matrikelnummer, vgl. Zeichenaufgabe Blatt 1) ziehen (oder Koordinaten eintippen).

<Netz> Gleichzeitig mit dem Netz der Pyramide in der xy-Ebene wird im Grafik-Fenster ein Schieberegler erzeugt, mit dessen Hilfe die Netzflächen aufgeklappt werden können.

Optional: Rechte Maustaste auf Schieberegler: <Animation ein>

Optional: Clipping-Box-Einstellungen ändern



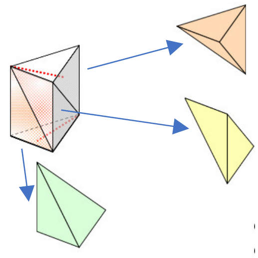
Aufgabengruppe 5 Messen - Konstruieren

Aufgabe 5.1: Exakte Fünfeckkonstruktion

a) Berechnen Sie aus der Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks nach DÜRER (vgl. Skriptum p 47) die Seitenlänge des Fünfecks bei gegebenem Umkreisradius von 1.
b) Bei der angegebenen Konstruktion hat der höchste Eckpunkt A die Koordinaten (0/1). Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Nachbareckpunkte von A und geben Sie diese mit Hilfe von Wurzelwerten an (zur Kontrolle: $x_B = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$)

Original der DÜRER-Konstruktion: Vgl. etwa.
https://de.wikisource.org/wiki/Underweysung_der_Messung,_mit_dem_Zirckel_und_Richtscheyt,_in_Linien,_Ebenen_unnd_gantzen_corporen/Zweites_Buch (Abbildung 15)

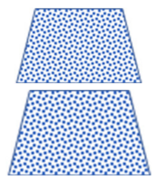
Aufgabe 5.2: Näherungskonstruktion
Beweisen Sie, dass bei Konstruktion von KOCHANSKI der halbe Kreisumfang tatsächlich bis auf die Zehntausendstelstelle genau erhalten wird
(vgl. Skriptum p 50).



Aufgabe 5.3: Volumsgleiche Pyramiden
Begründen Sie, warum das gegebene dreiseitige Prisma auf die dargestellte Art in drei volumsgleiche Pyramiden zerteilt wird.

Aufgabe 5.4: Trapezkonstruktionen
Geben Sie jeweils Konstruktionsgänge für die beiden angegebenen Trapeze an und diskutieren Sie die Schwierigkeiten, die bei händischer und bei DGS-Konstruktion auftreten können.
a) T1, geg: a = 7,2 cm, c = 5,6 cm, e = 8 cm, f = 7 cm
b) T2, geg: a = 7,2 cm, b = 4 cm, c = 5,6 cm, d = 3,5 cm

Außer Konkurrenz ☺
Welches der beiden Trapeze ist größer?

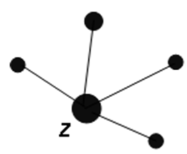


Aufgabe 5.5: Konstruktion einer Streckensymmetrale
Konstruieren Sie mindestens 5 Punkte, die gleich weit von zwei gegebenen Punkten P und Q entfernt sind. Bekanntlich sollen alle diese Punkte auf der Streckensymmetrale („Mittelsenkrechte" „perpendicular bisector") von PQ liegen, also auf einer Geraden.
Um diese Behauptung beweisen zu können, sehen Sie sich das Video https://www.youtube.com/watch?v=afcBvM0Z6x4 an und notieren Sie die wichtigsten Beweisschritte, um sie vor der Übungsgruppe erläutern zu können. Leider hat sich gegen Ende ein Fehler im dort gezeigten Beweis eingeschlichen. Wo liegt er?

Aufgabe 5.6: Konstruktionsapp für das Smartphone oder den Computer
Laden Sie die Konstruktionsapp www.euclidea.xyz und führen Sie im Modul α die Übungen bis zur Streckensymmetrale (perpendicular bisector) durch. Finden Sie eine kreative Möglichkeit, um nachzuweisen, dass Sie diese Übung tatsächlich durchgeführt haben. ☺

Aufgabe 5.7: Axonometrie
Zeichnen Sie das Modell der Hochhausanlage mit Bleistift und Lineal am beigefügten Angabeblatt. (Bitte rechts unten mit Namen versehen!) Geben Sie an, wie Sie Ihre Matrikelnummer in die Höhe h haben einfließen lassen. **Bonuspunkt** für die zusätzliche Konstruktion (samt AUSDRUCK!) in GAM oder Sketchup-Make, wobei die Winkel zwischen den Koordinatenachsenbildern gleich wie auf dem Angabeblatt sein sollen.

Bonuspunkt: Denksport
In einem Land seien die paarweisen Entfernungen zwischen den Städten alle verschieden. In jeder Stadt startet ein Hubschrauber und fliegt zur nächstgelegenen Stadt. Zeigen Sie, dass in keiner Stadt mehr als 5 Hubschrauber landen werden.
Hinweis: Winkelsumme in Z und die Innenwinkel der anliegenden Dreiecke beachten!

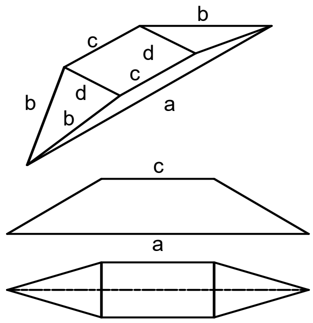


Aufgabengruppe 6 Rechnen - Konstruieren

Aufgabe 6.1: Keil

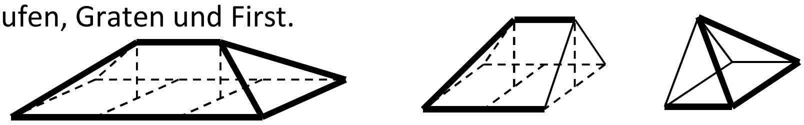
Berechnen Sie das Volumen des dargestellten Keils, wenn die beschrifteten Kantenlängen gegeben sind.

Hinweis: Beachten Sie Grund-und Aufriss und unterteilen Sie hier so, dass Sie ein Prima und zwei Pyramiden erhalten.



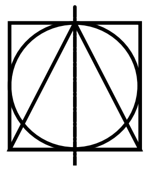
Aufgabe 6.2: Walmdach

Vergleichen Sie dazu das Schulbeispiel: „Walmdachberechnung“ Berechnen Sie das Dachvolumen und Summe der Längen von Traufen, Graten und First.



Aufgabe 6.3: Volumsvergleich

Das gezeichnete Quadrat samt eingeschriebenen Figuren rotiert um die gemeinsame Symmetrieachse. Wie verhalten sich die Volumina der drei entstehenden Drehkörper?



Aufgabe 6.4: Lernumgebung Würfel (Schwerpunkt)

a) Der Schwerpunkt des Dreiecks A(5/0/5), B(0/5/4), C(10/10/3) ist konstruktiv und rechnerisch zu ermitteln. Laden Sie dazu aus der Lernplattform das Angabeblatt im Anschnitt 5 „Konstruktive Raumgeometrie“ herunter (vgl. auch Aufgabe 5.3. des Skriptums, p53).

b) Begründen Sie (ohne die Rechnung zu Hilfe zu nehmen), warum der Schwerpunkt tatsächlich auf der lotrechten Würfelkante durch (5/5/0) liegen muss.

c) Ermitteln Sie rechnerisch oder zeichnerisch den ersten Spurpunkt der Schwerlinie durch C.

Aufgabe 6.5: Lernumgebung Würfel (Schnittpunkte)

Bestimmen Sie konstruktiv und rechnerisch die Schnittpunkte der Geraden durch C(0/10/0) und D(2,5(2,5/2,5) mit allen sechs Ebenen, auf denen Würfelflächen liegen. (Dieses Beispiel stellt eine Erweiterung bzw. Fertigstellung von Aufgabe 5.3 des Skriptums, p 54, dar.)

Aufgabe 6.6: Lernumgebung Würfel (Reflexion)

a) Bestimmen Sie konstruktiv den Strahlengang, der von A(5/0/5) ausgehend in B(2,5/2,5/0) an der xy-Ebene reflektiert wird. (vgl. auch Aufgabe 5.5 des Skriptums, p 56, dar.)

b) Konstruieren Sie den weiteren Verlauf, wenn der reflektierte Strahl danach auf die yz-Ebene trifft und dort reflektiert wird.

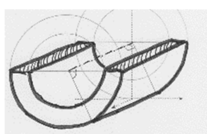
c) Angenommen, der Strahl geht von B aus und wird in A an der xz-Ebene reflektiert. Konstruieren Sie den reflektierten Strahl. Was fällt auf, wenn Sie Aufgabe b) und c) vergleichen?

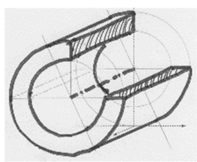
Aufgabe 6.7: Zeichenbeispiel

Zeichnen Sie mit GAM oder Sketchup-Make die drei Drehkörper (nur Oberflächen) aus Aufgabe 6.3. und stellen Sie bei gerader Matrikelnummer einen Vollschnitt und bei ungerader Matrikelnummer einen Halbschnitt der drei Flächen (!) dar.

Erläuterung: Vollschnitt = vordere oder obere Hälfte wird weggeschnitten
Halbschnitt = nur ein Viertel wird weggeschnitten

Hinweis: Falls notwendig, suchen Sie. für Sketchup-Make die Anleitung zum Zeichnen einer Kugelfläche im Internet (z.B. Youtube-Videos)





Aufgabengruppe 7 Begründen, Konstruieren, Rechnen

Aufgabe 7.1: Würfeleckenreflexion

Beweisen Sie, dass bei Aufgabe 6.6 (Übungen) die Strahlen bei b) und c) zueinander parallel sind. („Parallelreflexion in einer Würfelecke“).

Hinweis: Der ebene Fall wurde in Aufgabe 3.4. (Übungen) behandelt.

Die Parallelreflexion an Würfelecken hat praktische Bedeutung: Reflektor beim Fahrrad, Radarreflektor bei Donaubrückenpfeilern. Ohne diese Parallelreflexion wären die Brückenpfeiler am Radarschirm nicht sichtbar.

Laden Sie für die folgenden Beispiele aus der Lernplattform jeweils als Angabeblatt die Vorlage aus Anschnitt 5 „Konstruktive Raumgeometrie“ herunter und ***fertigen Sie herzeigbare Zeichnungen*** *an, sodass Sie anhand dieser jeweils die Konstruktion erläutern können:*

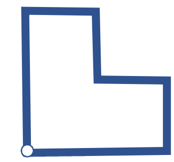
Aufgabe 7.2: Treffgerade

a) Konstruieren Sie jenen Strahl, der von A(5/0/5) ausgeht und beide Geraden PQ[(P(0/2,5/5), Q(5/2,5/2,5)] und RS[R(5/5/5), S(0/5/0) schneidet.
b) Berechnen Sie die Gleichung der Treffgeraden und ihre Schnittpunkte mit PQ und RS.

Aufgabe 7.3: Gemeinlot

a) Konstruieren Sie den kürzesten Abstand zwischen den beiden Geraden PQ[2,5/0/0), Q(0/5/0)] und RS[R(0/0/5), S(5/5/5)].
b) Berechnen Sie die Gleichung des Gemeinlots und dessen Schnittpunkte mit PQ und RS.

Aufgabe 7.4: Schatten



a) Vom Würfel wird ein Viertel (vgl. Skizze) ausgeschnitten, sodass eine x-parallele Treppe entsteht. Konstruieren Sie von diesem Objekt den Schlag- und Eigenschatten für die Parallelbeleuchtung mit Lichtrichtung AB[A(5/0/5), B(7,5/2,5/0)].
b) Konstruieren Sie vom Objekt wie im Skriptum Aufgabe 5.7 (p 58) angegeben den Schlag- und Eigenschatten für die Parallelbeleuchtung mit der Lichtrichtung AB[A(5/2,5/5), B(2,5/3/0)].

Aufgabe 7.5: Würfelsägeschnitte (Skriptum 5.8. a-d, p 60)

Konstruieren Sie die Schnitte unter Beachtung der Sichtbarkeit (Kein Teil des Würfels soll weggeschnitten werden.) Bei a, b, c geben Sie jeweils die Hilfen 1-3 an, die zum Einsatz kommen. Bei d soll ein möglichst großes gleichseitiges Dreieck als ebener Schnitt gefunden werden.

Aufgabe 7.6: Wahre Länge, Normale (Konstruktion in zugeordneten Normalrissen)

a) Gesucht ist die wahre Größe des Dreiecks ABC [A(3,5/-4/2), B(1/2/1), C(12/4/10)] durch Zusammensetzen der wahren Längen der drei einzelnen Dreiecksseiten. Ist das Dreieck gleichschenkelig? (ev. Rechnung?)
b) Die Normale auf die Dreiecksebene durch den Schwerpunkt des Dreiecks ist unter Beachtung der gegenseitigen Sichtbarkeit einzuzeichnen.

Aufgabe 7.7: POP-UP-Modell (zum Abgeben)

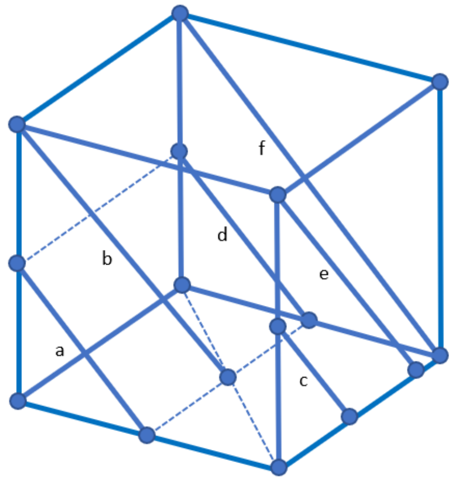
Fertigen Sie aus Papier (besser Karton 120 g oder 250 g) nach http://geometrie.muel.at/modelle-im-geometrieunterricht/pop-up-modelle/ ein POP-UP-Modell des Prismenstumpfmantels (Skriptum Aufgabe 5.11, p 63) an.

Aufgabengruppe 8 Lesen – Konstruieren

Aufgabe 8.1: Parallel oder nicht?

Geben Sie für das Würfelbild an: a ist parallel zu …. b zu … usw.

Idee nach
Wischounig|Asperl|Pillwein: Raumgeometrie Arbeitsbuch, ÖBV Wien 2016, p193



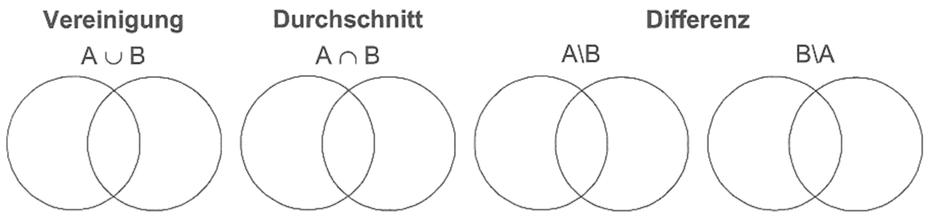
Aufgabe 8.2: BOOLEsche Operationen

Neben der Kenntnis der wichtigsten Raumtransformationen (vgl. Skriptum Abschnitt 6) ist für die Arbeit mit CAD das Umgehen mit BOOLEschen Operationen wichtig und hilfreich.

George BOOLE (1815 – 1864, Begründer der formalen Logik, Autodidakt)

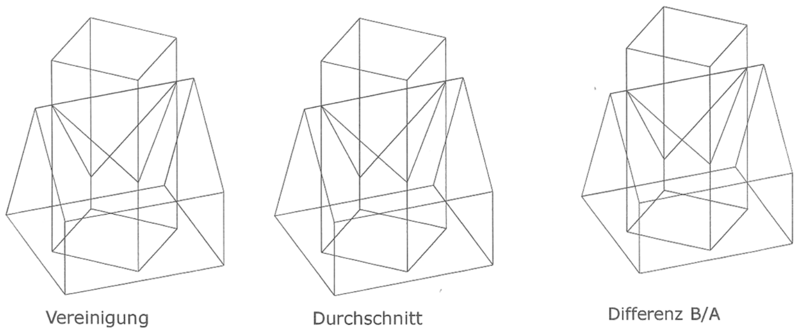
Zwei Beispiele aus der „ADI-CD 1“:
Schraffieren Sie in den VENN-Diagrammen….

>>> http://www.geometry.at/adi/



VENN-Diagramme (John VENN (1834 – 1923, Priester, Vorlesungen über formale Logik)

Ziehen Sie die sichtbaren Kanten der Lösungsobjekte nach. (A ist der Quader.)



Für die folgenden beiden Aufgaben gehen Sie auf die Seite www.adi3d.at/adi3 und öffnen die Plattform mit Username: sem-kph-uni und Passwort: mueller

Aufgabe 8.3: BOOLEsche Operationen

Öffnen Sie im Menüpunkt „Operieren“ den Bereich „Boolesche Operationen“: Hat sich bei der Lösung der Aufgaben in „go-bo-04a“, die sich direkt im Feld unter der Angabe befindet, ein Fehler eingeschlichen? Falls JA, welcher?

Aufgabe 8.4: Formenschatz erweitern – Infos einholen

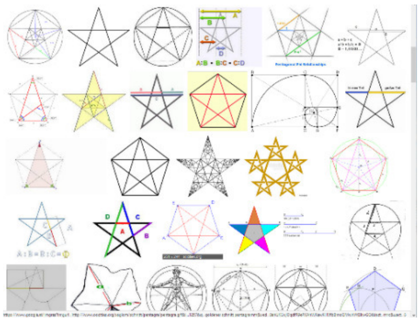
Öffnen Sie im Menüpunkt „Formenschatz“ die Infodateien für Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel sowie Kugel und speichern diese lokal ab. Falls Sie die Dateien mit einem geeigneten Programm, z.B. „ADOBE ACROBAT READER DC“ öffnen, so werden auch die im **U3D-Format** abgespeicherten Zeichnungsteile aktiviert (Infos z.B. unter http://www.dateiendung.com/format/u3d)

Bringen Sie die Dateien entweder auf einem Speichermedium oder am Laptop mit und demonstrieren Sie das Bewegen der Objekte.

Aufgabengruppe 9 Recherchieren – Konstruieren - Berechnen

Aufgabe 9.1: Goldener Schnitt im regulären Fünfeck

Finden Sie mittels Bildersuche im Internet Abbildungen, die mit dem regelmäßigen Fünfeck und dem Goldenen Schnitt in Verbindung stehen. Begründen Sie zwei dieser Behauptungen, dass nämlich ein goldener Schnitt vorliegt, „mathematisch“. Geben Sie auch die URLs der gewählten Zeichnungen/Aussagen an.



Aufgabe 9.2: Ein Experiment zum Fünfeck

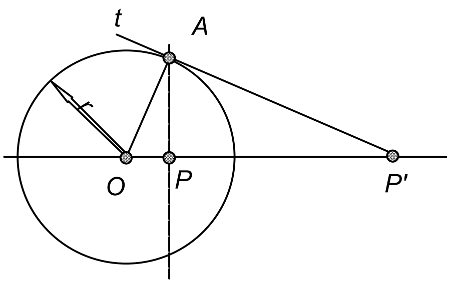
Sehen Sie sich das Video „Mathematik zum Anfassen! Festvortrag 2015“ von Albrecht BEUTELSBACHER aus Gießen (etwa im Zeitbereich 8:00 – 18:00 Minuten an. Einen Bonuspunkt für gibt es für das Nachbauen des Pentagondodekaeder-Experiments.

https://www.youtube.com/watch?v=dU7pCfDngvI.

Aufgabe 9.3: Inversion

a) Zeigen Sie mit Hilfe ähnlicher Dreiecke, dass gilt:

$$\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}}$$



Hinweis: Betrachten Sie OPA und OP’A.

b) Betrachten Sie nun die Abbildung, die jedem Punkt P außerhalb des Kreises (r sei gleich 1 angenommen) einen Punkt P‘ im Inneren zuordnet und jeden Punkt P‘ im Inneren einen Punkt P im Äußeren. Zeigen Sie, dass jede (?) Gerade auf einen Kreis abgebildet wird.

c) Visualisieren Sie dies mit Hilfe eines DGS (Geogebra, Nspire, ..).

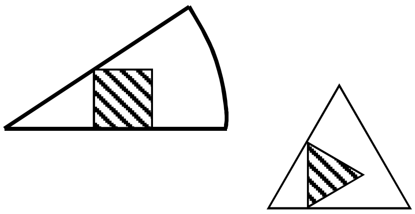
Aufgabe 9.4: Streckung als Konstruktionshilfe

a) Einem Kreissektor (r = 7 cm, α = 50°) ist ein Quadrat einzuschreiben. Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

Anleitung: Nehmen Sie zunächst ein Quadrat an, von welchem nur 3 Punkte auf der Begrenzung des Kreissektors liegen. Dann wenden Sie eine zentrische Streckung auf das „Testquadrat“ an ...

Wie kann das Quadrat noch zum Kreissektor liegen?

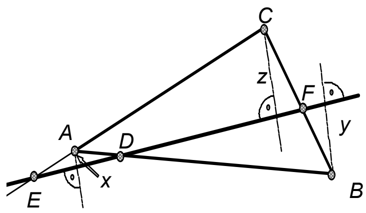
Mit dem gleichen Trick funktioniert auch die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks:



b) Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck. Konstruieren Sie ein diesem Dreieck eingeschriebenes ähnliches Dreieck, dessen Seiten (a', b', c') auf die jeweils entsprechenden Seiten (a, b, c) des ersten Dreiecks normal stehen!

Aufgabe 9.5: Satz von Menelaos

Beweisen Sie den Satz von MENELAOS (100 n.Chr.): Wird ein Dreieck von einer Geraden geschnitten, so sind die beiden Produkte aus den Längen je dreier nicht zusammenstoßender Seitenabschnitte gleich groß.



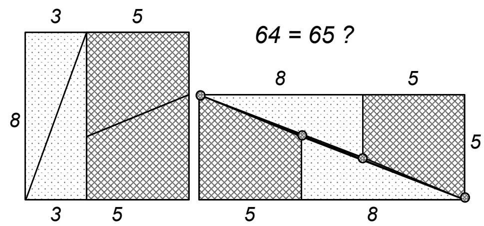
Aufgabe 9.6: Eine Gerade durch einen unerreichbaren Punkt zeichnen

a) Konstruieren Sie die Verbindungsgerade zwischen einem Punkt P und einem nicht am Zeichenblatt liegenden Schnittpunkt zweier Geraden g und h.

Hinweis: Deuten Sie den nicht am Blatt liegenden Punkt als Streckungszentrum zwischen zwei Dreiecken, wobei P eine Ecke eines dieser Dreiecke ist und die anderen Punkte auf g und h liegen!

b) Konstruieren Sie diese Verbindungsgerade unter Verwendung der Konstruktion eines Höhenschnittpunktes im Dreieck, bei dem nur zwei Eckpunkte am Zeichenblatt sind.

Aufgabe 9.7: 64 = 65 und die Fibonacci-Folge

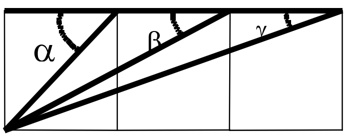


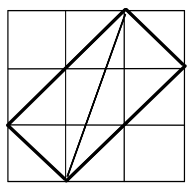
Sie kennen sicherlich diesen geometrischen Beweis, dass 64=65 ist: Das gegebene Quadrat wird wie angegeben geteilt, die Teile - Trapeze und rechtwinkelige Dreiecke - können zu einem Rechteck zusammengefügt werden.
Warum beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks (5*13=) 65 FE, der des Quadrats aber nur (8*8=) 64 FE? Irgendwo muss ein Fehler unterlaufen sein! Wo?
Die Zahlen 3, 5, 8, (13) sind ein Ausschnitt aus der Fibonacci-Folge. Ersetzen Sie dieses Tripel (Quadrupel) durch ein weit größeres Tripel aus dieser Folge und untersuchen Sie, ob sich auch daraus ein Rätsel machen lässt.

Aufgabe 9.8: Winkeladdition

Beweisen Sie ohne Verwendung von Winkelfunktion, dass $\alpha = ß + \gamma$ gilt.

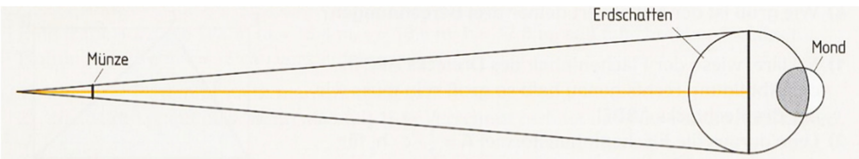
Hinweis: Wo sind die Winkel α, ß und γ in dem gezeichneten Quadratgitterraster versteckt?





Aufgabe 9.9: Mondentfernung

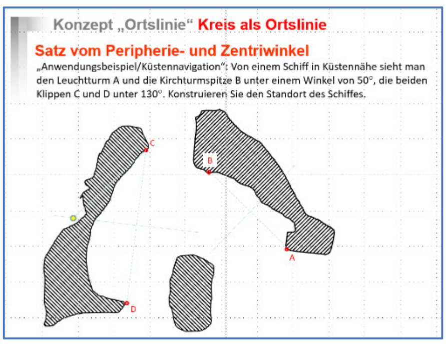
Im Schulbuch „Das ist Mathematik 3 p 202“ [Reichel - Humenberger (Hrsg.), Österr. Bundesverlag, 1. Aufl., 2009] findet sich folgende Skizze zur Bestimmung der Entfernung zwischen Erde und Mond zur Zeit einer Mondfinsternis: „Wenn man eine 1-Euro-Münze mit ausgestrecktem Arm in Richtung des Mondes hält, bedeckt sie ziemlich genau den kreisförmigen Erdschatten.“ (Münzendurchmesser etwa 2,3 cm, Entfernung Münze-Auge rund 70 cm) Was lässt sich für die Entfernung Erde-Mond aussagen?



Vgl. Sie dazu auch die Ausführungen auf der Website der Wiener Arbeitsgemeinschaft für Astronomie http://www.waa.at/hotspots/mond/supervollmond/

Aufgabe 9.10: Küstennavigation

Verwenden Sie als Angabe die Folie am Ende der Ausführungen über den Satz vom Peripherie-und Zentriwinkel oder laden Sie das Angabeblatt aus der Moodleplattform herunter. Konstruieren Sie den Standort des Schiffes und erläutern Sie in den Übungen die Vorgangsweise



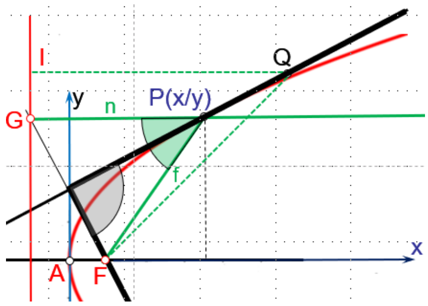
Aufgabengruppe 10 Kegelschnitte – Kreise - Kugeln

Aufgabe 10.1: Ellipse (Drehzylinderschnitt)

Beweisen Sie, dass der ebene Schnitt eines Drehzylinders eine Ellipse ist. Gehen Sie dabei analog zum Beweis nach DANDELIN für Kegelschnitte (Skriptum p 102/1 bzw. Präsentation Folie 40 -42, Ellipse) vor.

Aufgabe 10.2: Parabel

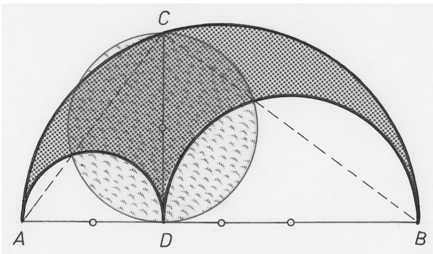
Referieren Sie beide Begründungen der „kinematischen Eigenschaft" der Parabel: *synthetisch* (vgl. Skriptum p 102/1 bzw. Präsentation Folie 51 -22) und *analytisch* [$y^2 = 2py$, Tangentengleichung $yy_P = p(x+x_P)$]: Zu zeigen ist jeweils, dass die Normalen auf die Tangenten im Schnittpunkt mit der y-Achse immer durch den Brennpunkt $F(\frac{p}{2}/0)$ gehen.

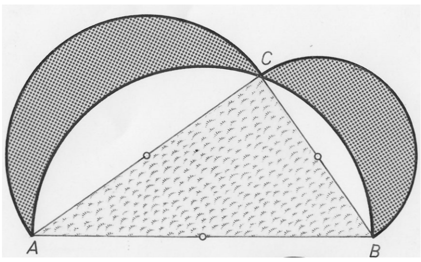


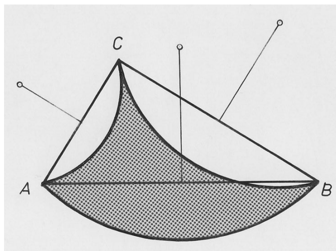
Aufgabe 10.3 (12 Punkte!): Arbelos, die Monde des Hippokrates und die Pelekoide

Die drei historisch-berühmten Kreisberechnungen waren für die griechischen Mathematiker / Philosophen zwiespältig, dass nämlich Kreisteilsummen, in denen das irrationale π vorkommt, sogar ganzzahlig (!) sein können. Die Seitenlängen des jeweils zugrundeliegenden rechtwinkeligen Dreiecks heißen wie üblich a, b, c. Beweisen Sie jeweils die Aussage:

a) Arbelos: $A_{Arbelos} = A_{Kreis\ (d=Höhe\ h}$ b) Monde: $A_{Mond(b)} + A_{Mond(a)} = A_{Dreieck}$ c) Pelekoide: $A_{Pelekoide} = A_{Dreieck}$



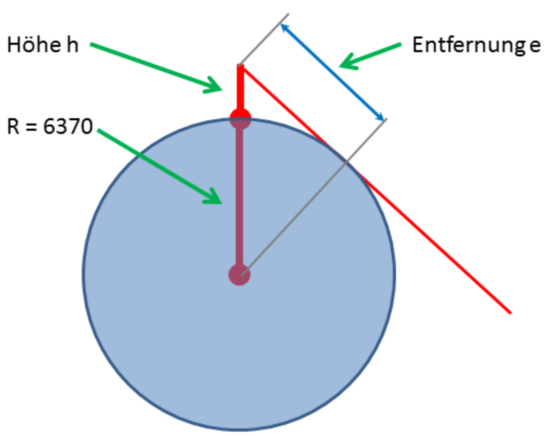




Viele weitere Kreisfigurensamt Lösungen finden Sie z.B. auf www.mathematikalpha.de (genauer unter http://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2016/12/09-Kreis.pdf auf Seite 999f).

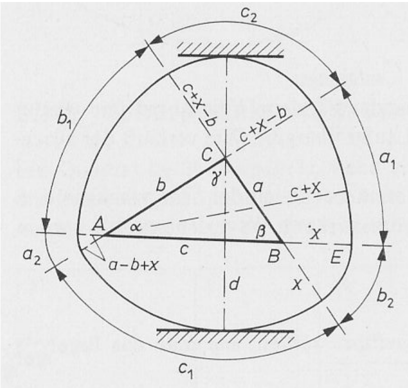
Aufgabe 10.4: Sichtweite

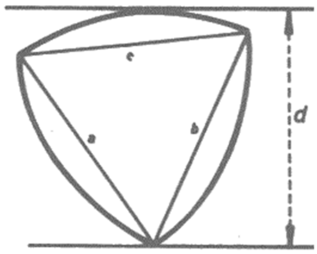
Wie weit sieht man auf der Erdoberfläche, wenn man auf einem Turm der Höhe h steht. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die zu entwickelnde Formel tatsächlich angewendet werden kann?



Aufgabe 10.5: REULEAUX-Dreieck und Gleichdick

a) Beweisen Sie, dass die von drei Kreisbögen umrandete Figur (wobei die Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks jeweils die Mittelpunkte sind) eine *Figur gleicher Dicke*, ein sogenanntes „Gleichdick“, ist. Wie groß ist der Umfang?



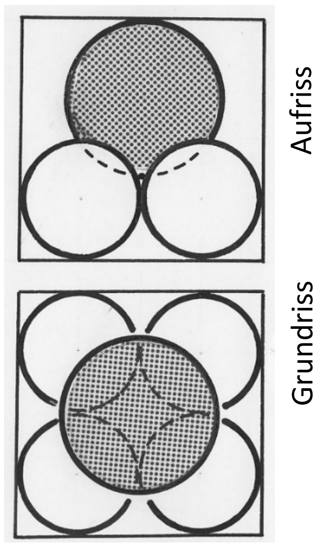


bc) Ein allgemeines Gleichdick kann man sich so entstanden denken: Eine Seite eines allgemeinen Dreiecks (hier c) wird um ein Stück x verlängert. Im Winkelfeld <BAC hat der Kreisbogen a_1 als Mitte den Punkt A. Die Nachbarkreisbögen haben als Mitten B bzw. C usf (vgl. Skizze). Zeigen Sie, dass sich die Kreisbogenzug schließt und dass damit ebenfalls ein Gleichdick entsteht. Wie groß ist sein Umfang?

Grafik aus
KRANZER, Walter: So interessant ist Mathematik, Aulis Verlag, Köln 1989

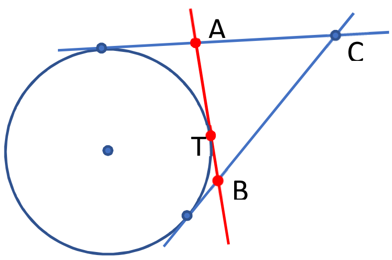
Aufgabe 10.6: Kugelradius gesucht

In einem Würfel der Kantenlänge 4a liegen vier gleich große Kugeln, die die Seitenflächen - wie im Grundriss ersichtlich - berühren. Darauf liegt eine Kugel, die diese vier Kugeln und die Deckfläche des Würfels berühren soll. Wie groß ist ihr Radius?



Und zum Schluss statt des Zeichenbeispiels zwei „Quickie-Beispiele“ …

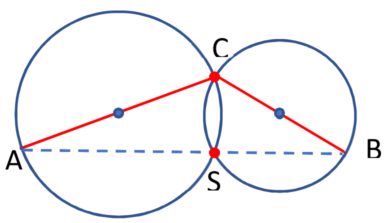
Aufgabe 10.7: Kreistangente



Gegeben ist ein Kreis mit drei Tangenten. Zeigen Sie, dass der Umfang des Dreiecks ABC unabhängig von der Wahl des Tangentenpunktes T ist.

Aufgabe 10.8: Kollinear?

Gegeben sind zwei schneidende Kreise (Schnittpunkte C und S). Durch C werden die beiden Durchmesser CA und CB gezeichnet. Beweisen Sie, dass A, S und B kollinear sind. (Hilft dabei ev. der Satz von THALES?)



Aufgabengruppe 11 Bauen - Skizzieren – Konstruieren - Berechnen

Aufgabe 11.1: Drehschütte

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden pyramidenförmigen oberen Raumes, wenn eine Drehschütte unter voller Ausnutzung eines DIN A4-Blattes je Seitenfläche gebaut und tatsächlich aufgestellt wird. (Vgl. Anleitung am Ende dieses Dokuments.)

(Weitere Modelle unter http://geometrie.muel.at/modelle-im-geometrieunterricht/pop-up-modelle/)

Einen Bonuspunkt gibt es für den Bau einer Drehschütte.

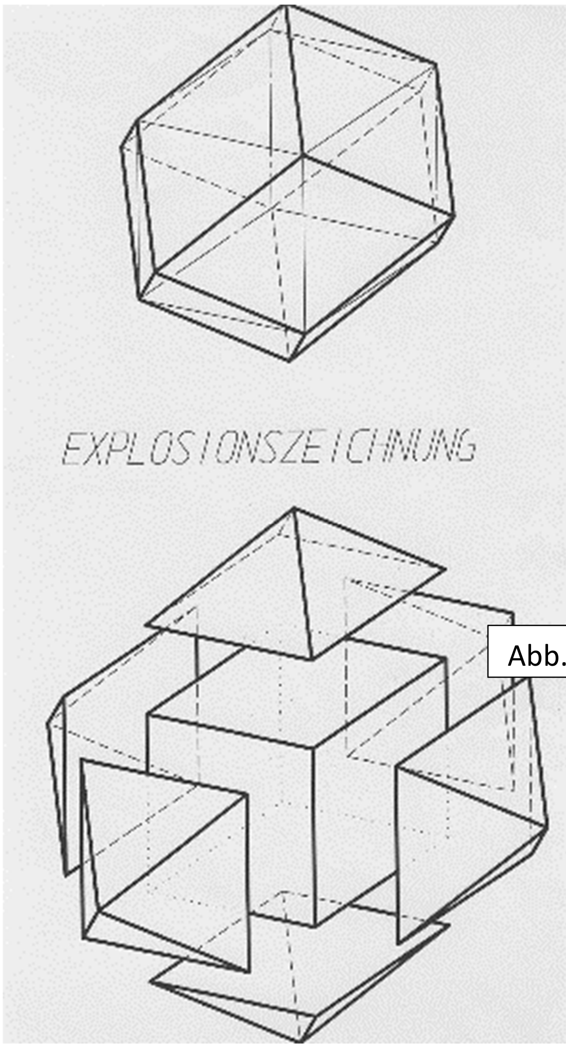


Abb.

Aufgabe 11.2: Rhombendodekaeder

Setzt man auf jeder der Seitenflächen eines Würfels eine gerade Pyramide auf, so entsteht ein „Sternkörper“. Bei einer bestimmten Pyramidenhöhe fallen zwei an einer Würfelkante anliegenden Pyramidenseitenflächen in eine Ebene und bilden einen Rhombus. Wie groß ist diese Höhe?

Warum zählt dieses Rhombendodekaeder nicht zu den Platonischen Körpern, obwohl es aus nur einer Art von Seitenflächen besteht?

Die Mittelpunkte der Rhomben seien die Eckpunkte eines neuen („dualen“) Körpers. Wie sieht er aus (ev in Abb. 1 einzeichnen) und wie heißt er?

Aufgabe 11.3: Ikosaeder

Skizzieren Sie (in Abb. 2) freihändig das durch die Eckpunkte der drei verschachtelten Rechtecke festgelegte Ikosaeder (vgl. Skriptum p. 86). Deuten Sie den dazu dualen Körper an, um welchen handelt es sich?

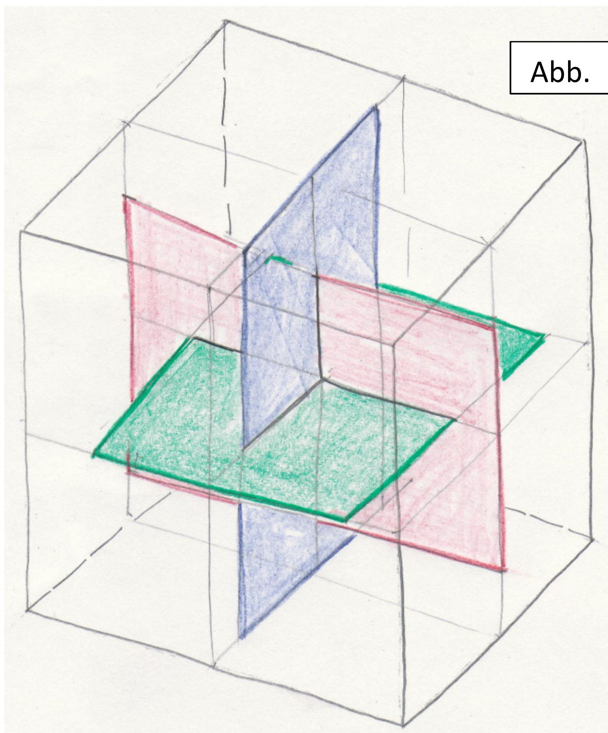


Abb.

Und zum Schluss ein Geometrie-Quickie und ein Beweis (?!):

Aufgabe 11.4: Sich überschneidende Quadrate

➔ Vgl. Abb.3

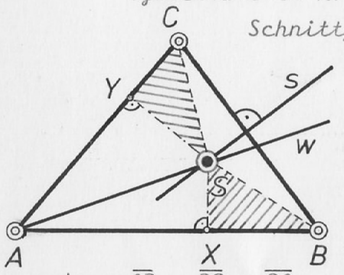
Aufgabe 11.5: Alle Dreiecke sind gleichseitig?

➔ Vgl. Abb.4

thomas.mueller@kphvie.ac.at

Alle Dreiecke sind gleichseitig !?

Bw: s sei die Streckensymmetrale von BC, w die Winkelsymmetrale in A. Folgende 4 Fälle sind für den Schnittpunkt S von s und w möglich:



1) S im Inneren:

$S \in s \rightarrow \overline{SB} = \overline{SC}$

$S \in w \rightarrow \overline{SX} = \overline{SY}$

$\Delta SBX \cong \Delta SCY \rightarrow \overline{XB} = \overline{YC}$

$S \in w: \overline{XA} = \overline{YA}$

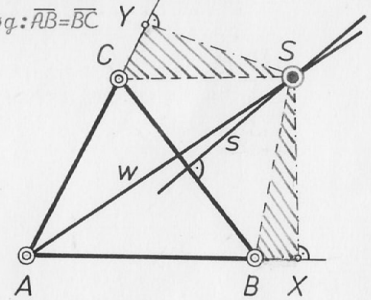
$\overline{AX} + \overline{BX} = \overline{AY} + \overline{CY} \rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$

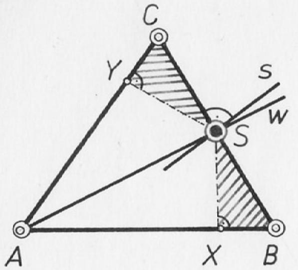
analog: $\overline{AB} = \overline{BC}$

qed.

also: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

2) S im Äußeren:
analog Fall 1)





3) S auf BC:
analog Fall 1)

4) S in A

$S \in s \wedge A = S \rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{AB} = \overline{BC}$ analog Fall 1)

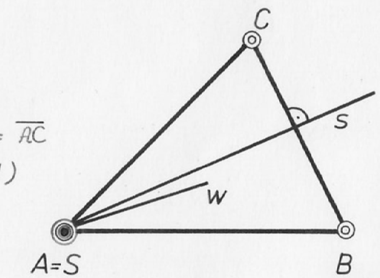
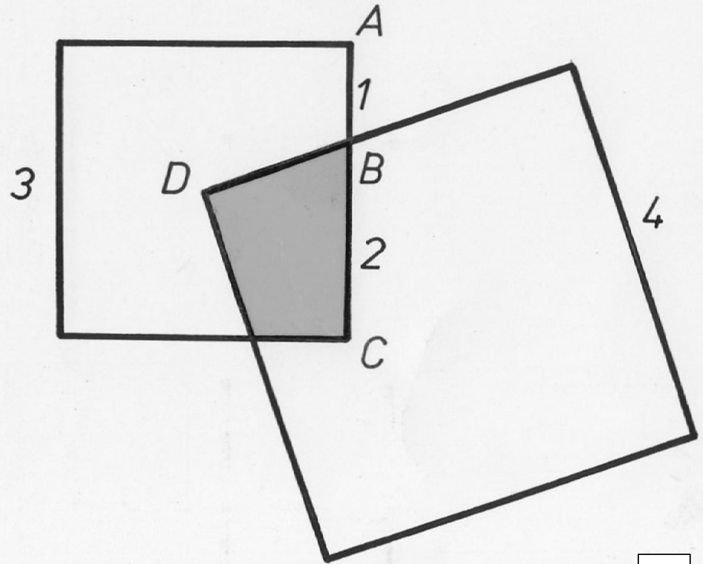


Abb.

Sich überschneidende Quadrate

Das kleinere Quadrat hat eine Seitenlänge von 3 Einheiten und das größere Quadrat eine Seitenlänge von 4 Einheiten. Der Eckpunkt D liege im Mittelpunkt des kleineren Quadrates. Das große Quadrat rotiert solange um D, bis der Schnittpunkt zweier Seiten im Punkt B die Strecke $\overline{AC}$ in drei gleiche Teile teilt. Gesucht ist die Fläche der Durchschnittsmenge beider Quadratflächen ?

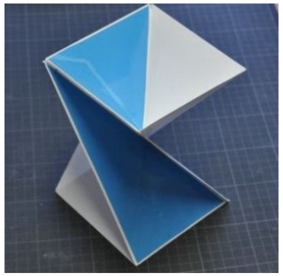


(aus Gardner "Math. Hexereien")

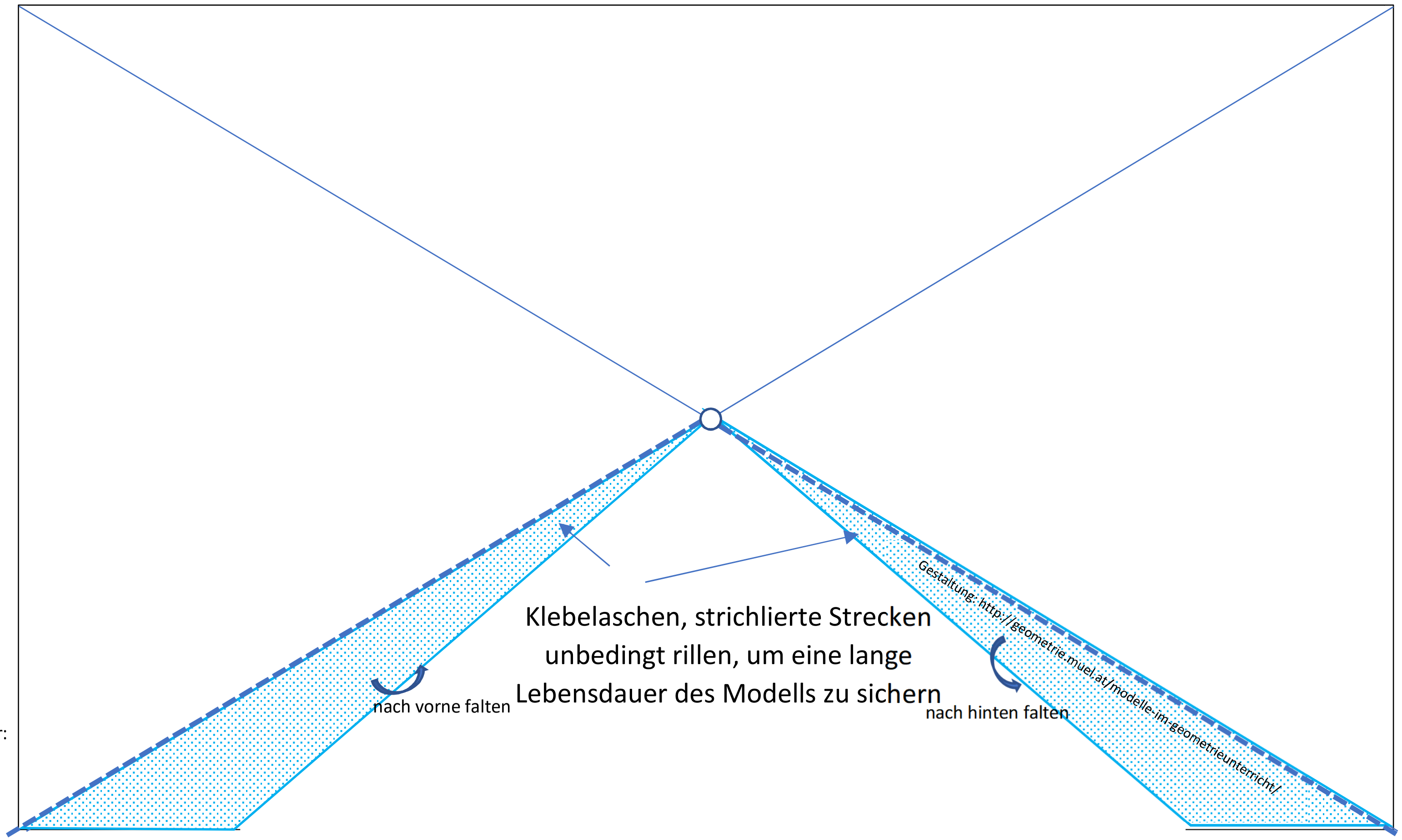
Abb.

Drehschütte, ein POP-UP-Modell zum Aufstellen

Das Modell wird aus vier kongruenten Bauteilen zusammengeklebt und bleibt trotzdem beweglich. Es kann flach zusammengelegt aufbewahrt werden.



Jeder der vier Bauteile (hier z.B. 20 x 12) sieht so aus, das kleine Loch in der Mitte dient der besseren Beweglichkeit des Modells:



Dank an M. Blümel, Purkersdorf, die Idee dazu stammt aus einem Prospekt der ehemaligen Firma DUROPACK, heute www.dssmith.com/atde/packaging

Literatur:
Felzmann, Weidinger, Blümel, Tittler: Geometrische Bilder 4. Klasse, p. 61, H-P-T, Wien, 1991