

# Der Raumgeometrieunterricht und seine Rolle im Fächerkanon

## Teil 3: Kommunikation und Erkenntnisgewinn

Thomas Müller

*Auch im letzten Teil dieser Serie steht die Sinnhaftigkeit des Raumgeometrieunterrichtes, besonders dessen Vermittlungsperspektive im Mittelpunkt. Was geben die Fächer Geometrisches Zeichnen, Darstellende Geometrie und wie sie alle nun heißen mögen, den Lernenden mit und was tragen sie zur Entwicklung unserer Gesellschaft bei? Was ist der Output? Während es im zweiten Teil um die Hilfe bei reflektierten Entscheidungsfindungen durch ein Individuum oder durch ein Kollektiv ging, stehen diesmal Kommunikation und Erkenntnisbeitrag im Mittelpunkt. Bitte bedenken Sie, dass alle Gedanken zunächst von einem Unterricht in der Sekundarstufe 1 ausgehen.*

Im Laufe des im ersten Teil [Müller 2010] beschriebenen Gedankenaustausches über die Sinnhaftigkeit einzelner Fachgegenstände [Fischer/Greiner/Bastel 2012] wurde für die Gegenstände Mathematik, Informatik und Geometrisches Zeichnen der Sekundarstufe 1 an Stelle der zusammenfassenden kurzen Bezeichnung „**Formalwissenschaften**“ der Namen „**Fächer regelhafter Darstellung und Verarbeitung**“ gewählt. Damit sollte der Inhaltskern noch besser und präziser umschrieben werden. In den folgenden Zeilen werden nun beide Bezeichnungen bedeutungsgleich verwendet.

Im Geometrieunterricht wird gezeichnet und dargestellt. Dass Zeichnungen bzw. raumgeometrische Überlegungen Basis von Entscheidungen von Einzelnen oder durch eine Gemeinschaft sein können, das wurde im zweiten Teil ausführlich dargestellt.

Diesmal geht es um die Fragen: Was haben unsere Fächer mit Kommunikation zu tun? Und gibt es wirklich Erkenntnisse, die der Raumgeometrieunterricht für die Menschen – Individuum und Kollektiv oder für die Weiterentwicklung der Gesellschaft bereitstellen kann – und die auch unseren SchülerInnen auf dem Niveau der Sekundarstufe 1 vermittelt werden können?

### Geometrie und Kommunikation

So wie Galilei Galileo (1564 – 1642) von der Mathematik als „Sprache, in der die Natur geschrieben ist.“ gesprochen haben soll, so wurde Geometrie lange als das wichtigste Verständigungsmittel der Techniker angesehen (vgl. etwa [Wunderlich 1966] in der Einleitung).

*Zeichnungen erweisen sich solcherart als das wichtigste Verständigungsmittel der Techniker. Sieht man damit die Zeichnung als eine Sprache des Ingenieurs an, so kann die darstellende Geometrie als die zugehörige Grammatik bezeichnet werden, deren Kenntnis und Beherrschung eine unabdingbare Notwendigkeit für alle Beteiligten ist.*

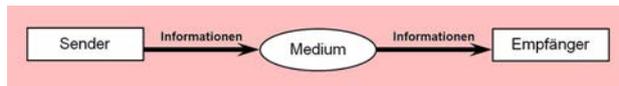
Im Lehrplan des Faches Geometrisches Zeichnen

[BMUKK 2000] steht „Sprache und Kommunikation“ als erster unter den Beiträgen zu den Bildungsbereichen:

#### **Sprache und Kommunikation:**

Sprache als Kommunikationsmittel für das Beschreiben und Erklären geometrischer Objekte und Vorgänge, die Zeichnung als Sprache der Technik, Präzision im sprachlichen Ausdruck; Zeichnungen als Mittel der interkulturellen Verständigung.

Jede dieser vier konzentriert zusammengefassten Aussagen ist eine Betrachtung wert! Für unsere Belange möge die erste Aussage, in der Sprache zur Unterstützung von Geometrie verwendet wird, zunächst ausgeklammert sein. Denn diese Funktionalität der Sprache wird ja in jedem Fachgebiet benötigt.



Geht man von der Definition der Kommunikation (vgl. etwa [Dichanz 1998]) aus, so kann man schon jedes Ergebnis einer Berechnung oder Konstruktion, deren Interpretation und Weitergabe, jedes Darstellen, jede Eingabe in einen Rechner und die Verarbeitung von Daten als kommunikative Akte ansehen. Dabei kann das Medium ein Blatt Papier oder wie jahrzehntelang davor eine Schiefertafel, nun ein Computerbildschirm oder einfach eine Sandfläche sein, in die man im Urlaub jemanden den Weg zum nächsten schönen Aussichtspunkt aufzeichnet.

Das Erlernen und exemplarische Anwenden von Kommunikation, ihrer Voraussetzungen und Gesetze sind nicht auf die Fächer des formalwissenschaftlichen Spektrums begrenzt. Durch das Arbeiten in Teams wird Kommunikation bei Projekten jeder Art während der Schulzeit trainiert. Vor allem im CAD- und Informatikunterricht lassen sich rasch und einfach exemplarische Szenarien finden, bei denen es ohne Kommunikation und Festlegung der Schnittstellen nicht geht: komplexe aus vielen Zeichnungen bestehende Pläne, die arbeitsteilig angefertigt werden, Websiteer-

stellung, Spieleprogrammierung, .... Als besonders passendes Beispiel sei an dieser Stelle an das Projekt „Neuer Rekord in Geometrisch Zeichnen“ [Katzenberger 2003] erinnert.

Kommunikation bedeutet Kooperation, z.T. Unterordnung und Flexibilität aber auch Autonomie und Originalität bei der Lösung von Teilaufgaben in Verantwortung für das Gesamtprojekt. Sie fordert Kreativität des Einzelnen und Kreativität der Gemeinschaft.

Kommunikation bedingt Transferfähigkeit – ohne Interpretation und Weitergabe wirken die (Teil-) Ergebnisse nicht!

Kommunikation kann innerhalb der Fachgemeinschaft (also zwischen FachexpertInnen alleine) oder zwischen FachexpertInnen und Laien/Individuen erfolgen:

### **Kommunikation zwischen ExpertInnen**

Diese geschieht hauptsächlich in der Fachsprache. Eine große Stärke der den Formalwissenschaften eigenen Symbolsprache ist deren weltweite Gültigkeit und die Überwindung von Sprach- oder Schriftproblemen. Es entsteht eine interkulturelle Kommunikationsmöglichkeit zwischen Fachleuten unabhängig von der nationalen, sozialen oder religiösen Angehörigkeit.

Was ist die Symbolsprache der Raumgeometrie?

Die Symbole auf dem Niveau der Sekundarstufe sind die gezeichneten Objekte – aufgebaut aus Linien, Strecken, Geraden, Ebenen hin bis zu Rissdarstellungen, genormten Projektionen, Schnittdarstellungen, Ablaufdiagrammen, ...

Der Kommunikationsvorgang ist komplex und verlagert sich derzeit von der reinen bildlichen Darstellung durch die Digitalisierung zur numerischen Modellierung: So kann beispielsweise bei einem durch ein CAD-Programm konstruierten Objekt, sei es eine simple Kugelschreiberhülle oder ein komplexe Turbine, zunächst eine bildhafte Konstruktion vorhanden sein, z.B. durch die Hauptrisse. Um dieses Objekt vom Konstrukteur zu einem Hersteller („am anderen Ende der Welt“) übertragen zu können, ist die Umwandlung in eine numerische Datenstruktur, die Digitalisierung üblich und notwendig. Alleine auf Basis des Zahlenmodells kann das Objekt dann hergestellt werden - ohne auch nur ein einziges Wort in sprachlicher Hinsicht zu verstehen. Diese Digitalisierung zeigt ein weiteres Phänomen von Kommunikation: die Verdichtung von Information, die dann nur noch durch eine Maschine lesbar und dann in eine für Menschen deutbare bildhafte Darstellung umwandelt werden kann.

### **Kommunikation zwischen ExpertInnen und Laien**

Wichtiger für eine breite Öffentlichkeit scheint der Aspekt, dass Laien mit ExpertInnen und ExpertInnen mit Laien kommunizieren können (müs-

sen). Erst dadurch wird das im zweiten Teil dieser Serie beschriebene Entscheidungshandeln für das Individuum möglich [Müller 2011]. Ein Experte hat in der Regel das relevante Wissen und soll es möglichst so weitergeben, dass Laien auf Basis der weiter gegebenen Information eine Entscheidung treffen können. Laien benötigen zum Verständnis einen bestimmten Bildungsstatus. Ob dazu nun der Bildungsstatus der Sekundarstufe 1 genügen oder der der Sekundarstufe 2 notwendig sein muss, kann hier nicht diskutiert werden.

Beispielsweise können Laien AuftraggeberInnen für die Errichtung eines Wohnhausprojektes sein – sie müssen Pläne lesen und interpretieren, eventuell ergänzen können.

Politische Entscheidungsgremien (in der Regel sind dies auch Laien) können die Entscheidung über ein umweltbeeinflussendes Projekt treffen müssen (Straße, Kraftwerk, Einkaufszentrum, ...).

Laien müssen als Schöffen die Entscheidung in einem Gerichtsverfahren treffen können. Sie müssen mit den ExpertInnen/GutachterInnen kommunizieren, ihre Gedanken reflektieren können, nachfragen können.

### **Kommunikation und Norm**

Auch dieser Gesichtspunkt scheint erwähnenswert: Ohne Normen gelingt keine weltweite Kommunikation in der Nichtsprachlichkeit. Selbst die verbale Kommunikation ist genormt. Man denke alleine an festgelegte Einheiten im Bereich der Längenmessung, Zeitmessung, an die Fachsprachen in Medizin, Technik, Informatik, ...

### **Fehlerfreies Kommunizieren, „Rechtzeichnung“**

Das richtige und fehlerfreie Kommunizieren ist im Bereich der Schrift Allgemeingut, eine fehlerfreie Rechtschreibung gehört zum guten Ton. Dass fehlerfreie graphische Darstellungen keine Selbstverständlichkeit sind, zeigen so manche fehlerhafte Abbildungen – sogar von elementaren Körpern; beim Umriss von Kegeln, Kreisen usw.

Wunderlich beklagt dies schon in der oben erwähnten Einleitung „Ebenso verdienstvoll wie es ist, richtig zu rechnen, ist es auch richtig zu zeichnen. Die „Richtigkeit“ bezieht sich dabei auf die konsequente Berücksichtigung der Gesetzmäßigkeiten des verwendeten Abbildungsverfahrens. Verstöße dagegen sind leider auch in sonst hochstehenden Werken zu finden.“ [Wunderlich 1966]

### **Geometrischer Wortschatz in der Alltagssprache**

Die Erweiterung der Sprache – durchaus des allgemeinen Wortschatzes ist beim Thema „Kommunikation“ erwähnenswert. So entstanden aus den Formalwissenschaften neue Wörter/Wortgebilde, die auch Laien verstehen sollten, wenn sie mitreden / entscheiden wollen: Computervirus, googlen, visualisieren, virtuell, extrudieren, modellie-

ren, Freiformfläche, Boolesche Operationen, ... Auch alte Wortschöpfungen wie „Quadratur des Kreises“ sind des Öfteren in der Tagespresse existent. Vergleiche dazu die Abbildungen 1 und 2.



Abbildung 1: KURIER, Sportteil vom 21.1.2011



Abbildung 2: KURIER, Kulturteil vom 30.6.2011

### Gefahr und Erkenntnis durch Verwendung der Symbolsprache „Zeichnung“

Geometrisches Konstruieren heißt wie mathematisches Operieren oder informatisches Programmieren in letzter Konsequenz, Denkschritte systematisch auf Routinen/Algorithmen zu stützen und sich der facheigenen Symbolsprache zu bedienen. Dadurch muss man nicht jeden Denkschritt reflektieren und fragen, warum die gesetzte Handlung eigentlich zum gewünschten Ziel führen könnte. Gestützt ist diese Vorgangsweise dadurch, dass man sich über die Zulässigkeit und Korrektheit der eingesetzten Verfahren durch die Prozesse des Beweisens, Begründens und Argumentierens laufend Sicherheit verschafft. Über den Einsatz eines bestimmten Verfahrens zur Informationsverdichtung und Zuspitzung in einem konkreten Anwendungszusammenhang ist die Expertise der Anwender/Anwenderinnen gefragt. Reine Symbolverwendung bedeutet Abstraktion und Abstraktion birgt beides: Wert und Gefahr, die es zu beachten gilt.

Im Geometriebereich äußert sich diese Symbolverwendung in festgelegten Konstruktionsabläufen wie bei der Ermittlung der wahren Länge einer Strecke, des Schnittpunktes zwischen Ebene und Gerade oder der Anwendung von mehreren automatisch ablaufenden Konstruktionsschritten bei einem Makro in einem CAD-Programm. Typische traditionelle geometrische Algorithmen sind Abbildungsverfahren wie das Einschneideverfahren bei der Axonometrie oder das Durchschnittsverfahren in Perspektive, die – einmal erläutert – anschauliche Bilder von Objekten liefern können.

Die systematische Auslagerung des Denkens, das

„automatisierte Funktionieren“ von Makros birgt ein nicht zu vernachlässigendes Gefahrenpotenzial: Nicht zulässige Vereinfachungen in einzelnen Situationen, besondere Aufnahmeestandpunkte, die unbewusste Nichtberücksichtigung von wichtigen Nebenbedingungen, zu grobe oder lückenhafte Modellierung können zu nicht erwarteten – auch fehlerhaften Darstellungen führen. Dies kann z.B. beim bewussten und unbewussten Zeichnen von Impossibiles zutage kommen (Abbildung 3)<sup>1</sup>.

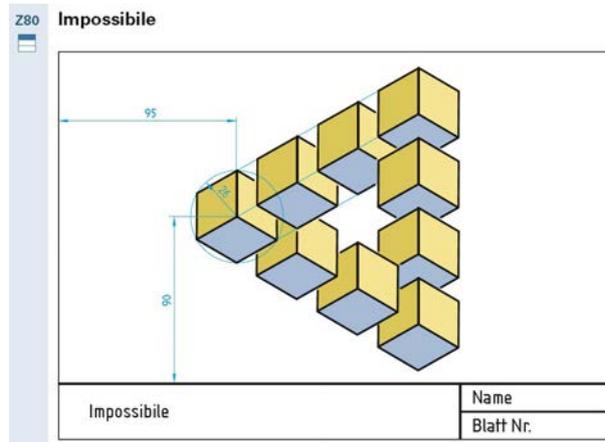


Abbildung 3: Impossible nach REUTERSVÄRD aus [Blümel/Müller/Vilsecker 2012, p41]

Diese Stärke der Formalwissenschaften, nämlich die zu Grunde liegenden Informationen systematisch nach festen Regeln – nicht inhaltlich – zu verarbeiten, kann auch zu neuen Erkenntnissen führen. Ebenso wie das Hinterfragen der vorgegebenen Regeln. Ich erinnere an die Gedankenschritte zur (zumindest didaktisch-methodischen) Motivation der Erweiterung des Zahlenbegriffes von reellen auf die komplexen Zahlen durch Hinterfragung der Regel, dass es keine Wurzeln aus negativen Zahlen geben kann. Ähnlich verhält es sich mit der Ordnerbedingung bei klassischer Grund-, Auf- und Kreuzrissdarstellung in zugeordneter Lage. Das Brechen der Regel, dass die beiden Bilder  $P'(x/y)$  und  $P''$  durch Ordner- und Abstandbedingung gekoppelt sein müssen, führt dazu, einem Punktepaar vier Koordinaten zuzuordnen zu können, also Punkte des  $R^4$  ähnlich einem  $R^3$ -Punkt durch zwei ebene Bilder darstellen zu können. Und plötzlich kann man  $R^4$ -Geometrie darstellend betreiben (Abbildung 4).

Auch das zweijahrtausendlange Ringen um das Auffinden nichteuklidischer Geometrien durch Hinterfragung der Axiome des EUKLID fällt in diesen Bereich der Infragestellung vorgegebener Regeln.

<sup>1</sup> Auch die fehlerhafte Interpretation bei optischen Täuschungen, Umspringbildern in Parallelrissen gehören hier dazu, vgl. etwa das Video von Kōkichi Sugihara, welches den 1. Platz beim „Illusion of the year“ Contest 2010 erreicht hat ([www.youtube.com/watch?v=fYa0y4ETFVo](http://www.youtube.com/watch?v=fYa0y4ETFVo)).

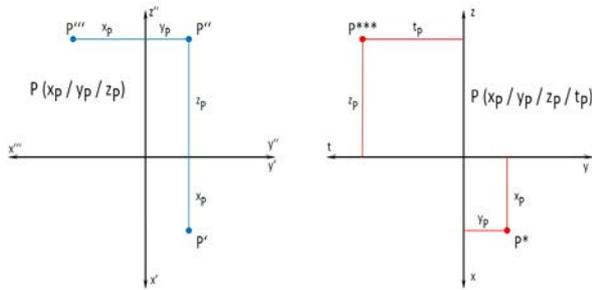


Abbildung 4: Darstellung von Punkten im R3 und im R4

## Erkenntnisgewinn durch Raumgeometrieunterricht

Der Nutzen, den die Formalwissenschaften zur Bildung jedes einzelnen und zur Bildung der Gesellschaft leisten, wird beim Wandel vom Lernen zum Verstehen sichtbar. Verstehen bewirkt ein Verständnis für die Zusammenhänge und Ideen. Verstehen ist die Basis für die bewusste Wahrnehmung der Auswirkungen der Fortschritte durch die Erkenntnisse der Formalwissenschaften und deren lebenslanger Nutzbarkeit. Ich denke hier lediglich an die sozusagen offen daliegenden Anwendungen wie an das Fernsehen (Satellitenempfang), Internet (Kommunikation), Verkehr (Navigation durch GPS) oder Medizin (Computertomographie).

Wie bereits vorhin im Abschnitt Kommunikation scheint auch bei den Überlegungen zum Erkenntnisgewinn eine Unterscheidung zwischen Individuum und Kollektiv sinnvoll zu sein.

### Raumintelligenz

Der durch den Raumgeometrieunterricht vorgesehene Erkenntniszuwachs<sup>2</sup> für ein Individuum ist im Lehrplan in den Abschnitten „Bildungs- und Lehr-aufgabe“, im „Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule“ und in den „Beiträgen zu den Bildungsbereichen“ ausführlich beschrieben [BMUKK 2000]. Herausgehoben seien die Erweiterung des Wortschatzes durch fachsprachliche Begriffe, die Vermehrung des geometrischen Formenschatzes

<sup>2</sup> Neben dem Erkenntniszuwachs soll es natürlich auch eine Entwicklung der Fähigkeiten geben, die zum Kommunizieren im Alltag gefragt ist:

- Skizzen für Zusammenbau von Geräten, Möbel, ... lesen können.
- Skizzen von konkreten Objekten für Einrichtung, Hausbau, ... anfertigen können.
- Skizzen für die Speicherung von verbal nur unzureichend beschreibbaren Vorgängen, Zuständen, ... (vgl. Unfallskizze) anfertigen können. Deshalb sollte die Herstellung von solchen Darstellungen auch ohne große Hilfsmittel erfolgen können. Das impliziert die Folgerung, dem geometrischen Freihandzeichnen mehr Raum zu geben! Auch Fotografien können diese Fähigkeit nicht ersetzen - warum? Denken sie an die Notwendigkeit von Gedächtnisprotokollen, die Vorstellung von geplanten, noch nicht existierenden Objekten, ...

und damit der Kommunikationsfähigkeit, die Förderung des strukturierten Denkens durch Analyse komplexer Objekte und Abläufe, die Steigerung der Problemlösefähigkeit und damit in weiterer Folge im Entscheidungshandeln.

Um den Erkenntnisgewinn für das Individuum im Besonderen hervorzuheben, sei auf die Beiträge des Raumgeometrieunterrichtes zur **Entwicklung der Raumintelligenz** eingegangen. Der 3D-Raum existiert als mentales Modell im Gehirn – und die Formalwissenschaften entwickeln die Brücke vom reell existierenden Raum zu diesem Modell und umgekehrt vom Modell zur Realität. Diese Brücke ist die Raumvorstellung. Weiterentwicklung, Schulung und Förderung der Raumintelligenz wird oft als das oberste der Ziele des Raumgeometrieunterrichtes angesehen. Raumintelligenz ist eine wichtige Voraussetzung für Erkenntnisgewinn. Eine ihrer Anwendungen findet sie etwa in der Medizin – in der Vorstellung vom Inneren des eigenen Körpers.

Der Lehrplan präzisiert dies durch die Formulierung, dass Geometrisches Zeichnen die „Vorstellung von den Erscheinungen der Welt in uns und das Verständnis für Raum und Figur“ verknüpfen soll [BMUKK 2000]. Weiters sollen „diese Grunderfahrungen zur Erkenntnis beitragen, dass Phänomene existieren, die unabhängig von der augenblicklichen Befindlichkeit des Menschen sind“. Die Gemeinschaft benötigt diese Erkenntnis- und die Kommunikationsfähigkeit im Bereich des Transfers zwischen mentalem Modell und der 3D-Realität und sie benötigt die durch das technische Grundwissen erworbene Handlungs- und Gestaltungsfähigkeit des Einzelnen. Exemplarisch sei an einige Berufsgruppen in diesem Zusammenhang erinnert: Piloten, Ärzte, Architekten, Maschinenbauer, Bautechniker, Kartographen usw. könnten ohne gut entwickelte Raumintelligenz ihre Aufgabe nicht erfüllen.

### Problemlösen führt zu Erkenntnisgewinn

In den Fächern regelhafter Darstellung und Verarbeitung wohnt die Kraft der Erkenntnisfähigkeit zur Weiterentwicklung des Gesamtkollektivs „Menschheit“ inne. Trotzdem bedenke man, dass sich praktische Problemstellungen nur mit den Mitteln eines einzelnen der traditionellen Schulunterrichtsgegenstände selten bearbeiten und lösen lassen. Deshalb können die Fächer regelhafter Darstellung und Verarbeitung als Bildungsgegenstände im Bereich der Problemlösung und des daraus möglicherweise folgenden Erkenntnisgewinns nicht in ihrer Isoliertheit alleine betrachtet werden.

Dennoch scheint es mir für die SchülerInnen besonders motivierend und wichtig, jene Beiträge, - heute selbstverständliche – Errungenschaften des täglichen Lebens, die primär und offensichtlich auf geometrischen Erkenntnissen beruhen, hervorzuheben, darzustellen und zu erläutern.

## Hinweis auf Beispiele aus der Unterrichtspraxis

Die folgenden Beispiele sollen vor allem den Beitrag der Raumgeometrie in Zusammenhang mit den Werkzeugen der Mathematik, Physik und vieler technischer Fachgegenstände, die nicht im allgemeinbildenden Fächerkanon vertreten sind, aufzeigen. Sie wurden im Hinblick darauf ausgewählt, dass sie durchaus innerhalb des Verständnishorizontes der Sekundarstufe 1 erläutert werden können.

### Beispiel 1 – Paraboloid als Satellitenempfangsantenne

Der Satellitenempfang im Bereich Fernsehen nützt bekanntermaßen die Parabeleigenschaft<sup>3</sup>, dass nämlich parallel zur Parabelachse einfallende Strahlungsenergie im Brennpunkt so weit gebündelt werden kann, dass die Signale stark genug sind, um fehlerfrei empfangen zu werden.

Dass Parabolspiegel als Schallschirme bei Richtmikrofonen, auch zum Abhören von weiter entfernt stattfindenden Gesprächen eingesetzt werden können, kann diversen Internetseiten<sup>4</sup> entnommen werden.

### Beispiel 2 – Reflektoren basierend am Strahlengang in einer Würfecke

Auf die Parallelreflexion von Radarstrahlen an einer Würfecke und deren Anwendung im Schiffsverkehr zur Sichtbarmachung von Hindernissen wird ausführlich in [Müller 2005] oder [Müller 1989] eingegangen.

### Beispiel 3 – Lithotripter

Zunächst scheint die Brennpunkteigenschaft einer Ellipse nur geometrisch interessant zu sein: Die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen werden an der Ellipse so reflektiert, dass sie danach durch den zweiten Brennpunkt verlaufen. Räumlich gesehen Analoges entsteht, wenn man das durch Drehung einer Ellipse um die Hauptachse entstehende Ellipsoid hernimmt: Um die von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen im anderen zu bündeln, genügt bereits ein Teil dieser Ellipsoidfläche. Dank der technischen Realisierung mit Hilfe von Stoßwellen ist es nun denkbar, Energie von außerhalb im Inneren eines Körpers so wirksam zu machen, dass zum Beispiel Nieren- oder Gallensteine zertrümmert werden können. Dies stellt in knappen Worten die Funktionsweise eines Nierenstein- oder Gallensteinzertrümmers<sup>5</sup> (Lithotripters) dar.

<sup>3</sup> Vgl. etwa die Animation [home.eduhi.at/teacher/ali-ndner/geonext/geonext/klasse4/parabel/parabel3.htm](http://home.eduhi.at/teacher/ali-ndner/geonext/geonext/klasse4/parabel/parabel3.htm) oder die Hinweise unter [www.mathematikunterricht.de/lehrplan/Parabel.PDF](http://www.mathematikunterricht.de/lehrplan/Parabel.PDF) [2011124]

<sup>4</sup> Vgl. etwa [www.abhoergeraet.eu/parabolantenne.html](http://www.abhoergeraet.eu/parabolantenne.html) [2011125]

<sup>5</sup> Vgl. etwa [san-pc.hrz.uni-siegen.de/fjm/mathnat/dusthome/dateien/koorgeom/lithotr1.htm](http://san-pc.hrz.uni-siegen.de/fjm/mathnat/dusthome/dateien/koorgeom/lithotr1.htm) [20110906]

### Beispiel 4 – Global Positioning System/GPS

Das Ermitteln der eigenen Position mittels GPS<sup>6</sup> kann man sich vereinfacht durch den Schnitt von Kugeln erklären. Die Mittelpunkte dieser Kugeln entsprechen jeweils den GPS-Satelliten, die Radien werden auf Grund der Laufzeit der von den Satelliten ausgesandten Zeitimpulse rechnerisch bestimmt. Die Idee kann den SchülerInnen schon durch einen Analogieschluss in der Ebene durch Schnitt von Kreisen (auch im Mathematikunterricht im Bereich „Ortslinien“) verständlich gemacht werden.

Auch eine Darstellung/„Modellierung“ mit Hilfe von Stabmodellen (Strecken werden etwa mit Hilfe von Plastiktrinkhalmen materialisiert) und der Hinweis auf deren Anwendungen in der Satellitengeodäsie können für die Lernenden sehr motivierend sein, vergleiche etwa [Müller/Vanek 2010] oder [Müller 1991].

### Beispiel 5 – Computertomografie

Bei der Computertomografie<sup>7</sup> spielt die Idee des Rekonstruierens eines Raumobjektes durch das Zusammensetzen von errechneten Schichtenbildern eine zentrale Rolle. Dies kann im Raumgeometrieunterricht der Sekundarstufe 1 durchaus bewusst gemacht werden, wie die Abbildung 5 zeigt.

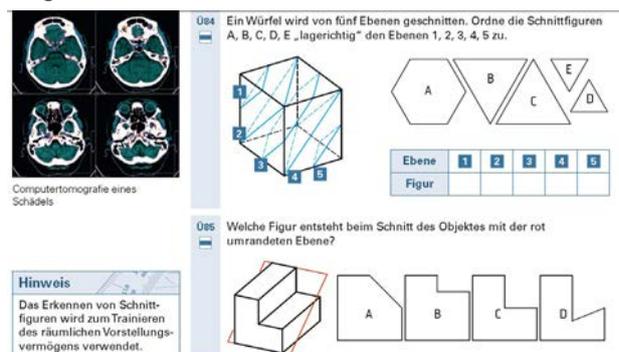


Abbildung 5: Rekonstruktion eines Raumobjekts aus ebenen Schnitten aus [Blümel/Müller/Vilsecker, p43]

### Beispiel 6 – Kunst und Fußball

Fundierte geometrische Kenntnisse können auch bei der Beantwortung interessanter Fragen aus Kunst bzw. Kunstgeschichte helfen. Das hat Hellmuth Stachel jüngst mit seinen Untersuchungen<sup>8</sup> zu Vermeers Meisterwerk „Die Malkunst“ gezeigt, vergleiche dazu [Gutruf/Stachel 2010]. Weitere Rekonstruktionsanalysen (zu Werken Albrecht Dürers) kann man etwa in [Schröder 1980] finden.

<sup>6</sup> Vgl. etwa [www.gps.gov/systems/gps/](http://www.gps.gov/systems/gps/) [20110908]

<sup>7</sup> Vgl. etwa [de.wikipedia.org/wiki/Computertomographie](http://de.wikipedia.org/wiki/Computertomographie) [20110905] oder [www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1980%20Band%205/Hejtmanek1980.pdf](http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1980%20Band%205/Hejtmanek1980.pdf) [20110904]

<sup>8</sup> Vgl. etwa [www.wiennews.at/vermeer-die-malkunst](http://www.wiennews.at/vermeer-die-malkunst) [2011125]

In diesem Abschnitt der Rekonstruktionsüberlegungen sei an die Beispiele, ob ein Fußball im Augenblick der Darstellung im Tor gewesen sei, erinnert. Darauf wird ausführlich in [Müller/Scheiber 2000] oder in Beispielen im Arbeitsbuch [Wischounig 2006] eingegangen.

### Beispiel 7 – Raumsiele und Impossible

Dass der Geometrieunterricht durchaus einen Beitrag zu Freizeit und Unterhaltung leisten kann, das erkennt man an den vielfältigen realen und virtuellen<sup>9</sup> Raumsielen. Anregungen zu selbst herstellbaren Raumsielen findet man in [Müller 1990].

In diesem Bereich der Unterhaltung und des Nachdenkens über den Raum soll an die bereits oben erwähnten Impossible erinnert werden. Sie zeigen, dass man nicht nur Unmögliches denken, sondern auch darstellen kann, vgl. etwa [Blümel/Müller/Vilsecker 2012, p41].

### Beispiel 8 – Formenschatz/Bauwesen

Abschließend seien die Fortschritte in der Erweiterung des Formenschatzes in Architektur und Bauwesen angedeutet, beginnend bei der Schaltung gekrümmter Flächen mit geraden Latten (Hyperboloid, Wendelfläche, HP-Fläche) bis hin zu den Bezierflächen und Extrusionsflächen, die erst durch aktuelle Software praktisch realisiert werden konnten.

Zum Abschluss dieses Teils über Erkenntnisgewinn noch etwas zum Nachdenken für Ihre SchülerInnen: Jahrhundertlang wurden die lotrechten Mauern von Häusern mit Hilfe eines Senklot/Schnurlothes gebaut. Welche Erkenntnisse können besonders daraus gezogen werden, wenn man bedenkt, dass die Erde eine Kugelgestalt hat und ein Lot immer zum Erdmittelpunkt weist?

## Literatur

ADI1-CD, 2000: *Beispiele und Anregungen*, [www.geometry.at/adi/](http://www.geometry.at/adi/) [20111014]

ADI2-CD, 2008: *Raumgeometrie - intuitiv und konstruktiv*, [www.geometry.at/adi/](http://www.geometry.at/adi/) [20111014]

Asperl, Andreas / Gems, Werner / Wischounig, Michael: *GZ Handbuch für HS /KMS, Raumgeometrie und CAD, GZ-Lehrbuch für die 7. und 8. Schulstufe*, Veritas, Linz, 2008

Blümel, Manfred / Müller, Thomas / Vilsecker, Karin: *Geometrische Bilder Skizzieren – Konstruieren – Modellieren*, GZ-Lehrbuch für die 7. und 8. Schulstufe, ÖBV, Wien, 2012

BMUKK: *Lehrplan für die Hauptschule*, BGBl. Nr. 134 (HS) bzw. BGBl. Nr. 133 (AHS) vom 11. Mai 2000

Vgl. auch: <http://www.bmukk.gv.at/medienpool/785/ahs10.pdf> ([http://www.bmukk.gv.at/medienpool/878/lp\\_hs\\_geomzeichnen\\_878.pdf](http://www.bmukk.gv.at/medienpool/878/lp_hs_geomzeichnen_878.pdf))

<sup>9</sup> Vgl. etwa die vom Autor zusammengestellten Sammlung von geometrischen Onlinespielen im Internet [geometrie.schule.at/index.php?modul=themen&top\\_id=7282](http://geometrie.schule.at/index.php?modul=themen&top_id=7282) [20111129]

Dichanz, Horst: *Handbuch Medien, Medienforschung - Konzepte, Themen, Ergebnisse Bundeszentrale für politische Bildung*, Bonn, 1998, S.12

Fischer, Roland / Greiner, Ulrike / Bastel, Heribert (Hrsg.): *Fächerkonzepte und Bildung*. Trauner-Verlag 2012, im Druck

Gutruf, Gerhard / Stachel, Hellmuth: *The Hidden Geometry in Vermeers 'The Art of Painting'*<sup>10</sup>, *Journal for Geometry and Graphics*, Volume 14 (2010), No. 2, 187-202

Katzenberger, Manfred: *Neuer Rekord in Geometrisch Zeichnen*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 22, Heft 2/2003, Innsbruck, S. 31 – 34

Müller, Thomas: *Der Raumgeometrieunterricht und seine Rolle im Fächerkanon, Teil 1*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 29, Heft 2/2010, Innsbruck, S. 21 – 22

Müller, Thomas / Vanek, Ulrike: *Bewegliche Oktaeder, in Erinnerung an unseren Lehrer Walter Wunderlich - gewidmet zum 100. Geburtstag*, *Informationsblätter für Darstellende Geometrie*, Jahrgang 29, Heft 2/2010, Innsbruck, S. 31 - 33

Müller, Thomas: *Der Raumgeometrieunterricht und seine Rolle im Fächerkanon, Teil 2, Reflektierte Entscheidungsfähigkeit*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 30, Heft 1/2011, Innsbruck, S. 7 – 11

Müller, Thomas: *Verstärkt konstruieren - neben dem Modellieren! Geometrieunterricht mit einem dynamischen 3D-Programm - Möglichkeiten und Impulse*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 24, Heft 1/2005, Innsbruck, S. 11 – 22.

Müller, Thomas / Scheiber, Klaus (Mitarbeit): *Tor oder kein Tor, Über die Schnellebigkeit in den neuen Medien am Beispiel des PARMA-Tores*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 19, Heft 1/2000, Innsbruck, S. 12 – 15

Müller, Thomas: *Bau von Polyedermodellen aus Trinkhalmen*, *Informationsblätter für Darstellende Geometrie* 1/1991, Innsbruck, 52

Müller, Thomas: *Spiele und Denkaufgaben im Raum*, *Informationsblätter für Darstellende Geometrie* 2/1990, Innsbruck, 30-37

Müller, Thomas: *Geometrie auf der Donau oder „Wie eine Würfecke der Schifffahrt dient“*, *Informationsblätter für Darstellende Geometrie* 2/1989, Innsbruck, S.49-53

Schröder, Eberhard: *DÜRER Kunst und Geometrie*, Birkhäuser Verlag Basel, 1980

Stachel, Hellmuth: *Wozu Geometrie? Vortrag bei der Ehrenpromotion an der TU Dresden, 2010* [www.geometry.tuwien.ac.at/stachel/WozuGeometrie.pdf](http://www.geometry.tuwien.ac.at/stachel/WozuGeometrie.pdf) [20101214]

Vohns, Andreas: *Mathematik im Kontext*. In: Helmerich, M. & Lengnink, K. & Nickel,

G. & Rathgeb, M. (Hrsg.), *Mathematik verstehen – Philosophische und didaktische Perspektiven*, Mühlthal: Verlag Allgemeine Wissenschaft, 2010

Wischounig, Michael / Pillwein, Gerhard ua.: *Raumgeometrie Konstruieren und Visualisieren Arbeitsbuch*, ÖBV&HPT, Wien, 2006

Wunderlich, Walter: *Darstellende Geometrie I, BI Hochschultaschenbücher, Band 96*, Mannheim, 1966

<sup>10</sup> Online unter [www.geometry.tuwien.ac.at/stachel/j14h2gutr.pdf](http://www.geometry.tuwien.ac.at/stachel/j14h2gutr.pdf) [20111124]