Blitzlichter auf erstaunliche geometrische Sätze zum Experimentieren und Beweisen

Unterlagen zum Workshop am Tag der Mathematik an der PH NÖ in Baden am 28. Feber 2018

Thomas Müller, Krems

Einleitung: Problemlösen und Experimentieren

Die Zeitschrift *mathematik lehren* widmete der Thematik Problemlösen lernen in der Geometrie 2016 ein ganzes Heft [KUZLE, BRUDER 2016]
Problemlösen lernen ist nicht nur in der Mathematik ein wichtiges Element, manche würden vermutlich von „Herausforderungen begegnen“ sprechen. Die hier erworbenen Strategien können auch später „im Leben“ angewendet werden, z.B. wie organisiere ich die nächste Woche, wie komme ich von A nach B, …

In der Geometrie gibt es viele Lerngelegenheiten, um den Erwerb von Problemlösekompetenzen zu lernen, die Wege zur Lösung zu gestalten, um Werkzeuge und Strategien zum Problemlösen herauszuarbeiten, zu erkennen. Denn hier liegt eine gegebene Situation oft bildhaft vor einem, die gewünschte Situation ist meist ebenfalls bildhaft.

Geometrie soll ja allerdings mehr sein, als das Zeichnen von Figuren oder Berechnen von Inhalten, Hellmuth STACHEL hat dies wunderbar in einem Satz zusammengefasst:

> *Das Bild allein macht noch nicht die Geometrie aus, sondern erst die Verknüpfung des Bildes mit logischen Schlussweisen, so dass das Bild letztlich nur als Inspiration fungiert sowie als Kontrolle für unsere Überlegungen.* [STACHEL 2014, p82]

Hier sollen geometrische Fragestellungen vorgestellt werden, kleine Forschungsfragen für die Lernenden, an denen sie Ihre Problemlösefähigkeit entwickeln können und den Einsatz verschiedener Werkzeuge sehen können.
Kinder sollen bewusst die **Mathematik als Vermittlerin von Denktechnologien** sehen. (Helmut HEUGL)

KUZLE und BRUDER sprechen bei der Werkzeugauswahl von heuristischen Hilfsmitteln („Heurismen“), die sich mit dem Entwicklungsstand der Heranwachsenden verändern, von einfachen Figuren, Hilfslinien und Stützdreiecken in der Mittelstufe bis zur Anwendung der analytischen Geometrie in der Oberstufe.

Ein Teil der folgenden heuristischen Prinzipien ist dem oben erwähnten Aufsatz entnommen

- Vorwärtsarbeiten (Was kann man daraus folgern?)
- Rückwärtsarbeiten (Das Ziel ist bekannt, was muss ich wissen, um dahin zu gelangen?)
- Analogien nutzen/Rückführen auf Bekanntes (Kenne ich bereits Ergebnisse zu solchen Fragen? Kann ich etwas Einfacheres lösen?
- Strukturieren, Zerlegen des Problems/Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip: Wie kann man eine Aufgabe, einen Sachverhalt, das math. Objekt geschickt zerlegen/aufteilen oder ergänzen, um auf ein bekanntes Problem zu kommen?
- Symmetrieprinzip (Fallen mir Symmetrien auf? Was folgt daraus?)
- Invarianzprinzip (Was bleibt gleich, wenn ich Ausgangs oder Zielobjekte verändere/bewege?)
- Extremalprinzip (Gibt es Konstellationen, die ein Maximum/Minimum zur Folge haben?)
- Beschreiben der Problemstellung (Peer-Lösung)
- …

Liegt eine geometrische Aufgabe vor, so ist ein erster vernünftiger Schritt das **Vertrautwerden mit der Problemstellung**. Dies kann etwa durch das Visualisieren geschehen, das Anfertigen von Skizzen, vielleicht durch exakte Konstruktionen. Man geht von unterschiedlichen Angabemöglichkeiten aus, beobachtet die Ergebnisse und beschreibt sie. Man *experimentiert*.

Ein Experiment ist bekanntermaßen im Sinne der Wissenschaft eine nach bestimmten Methoden angelegte Untersuchung zur Gewinnung von Information, von Erkenntnissen:

Ein Experiment soll beliebig oft wiederholbar sein, soll unter gleichen Bedingungen gleiche Ergebnisse liefern. Die Ergebnisse können dann durch eine möglicherweise noch zu entwickelnde Theorie erklärt/begründet werden.

Problem/Aufgabenstellung → Experiment → Erkenntnisse
→ theoretische Einbindung oder Entwicklung einer neuen Theorie

Hier bietet sich unterstützend ein DGS, dynamisches Geometrieprogramm, wie Geogebra oder NSpire als ideales Mittel an.

Literatur:

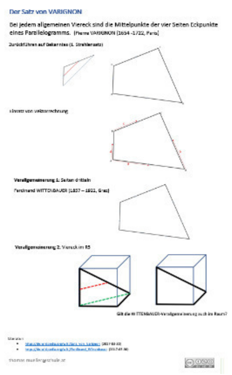
FILLER, Andreas: Was ist neu in der Sek. II Wie sich das Lösen geometrischer Probleme ändert; in *mathematik lehren* 196| 2016 „Probleme lösen lernen im Themenfeld Geometrie“

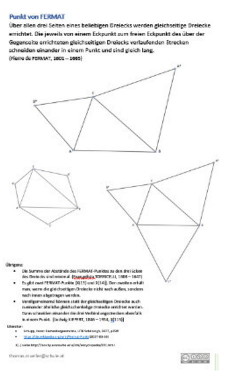
KUZLE, Ana/BRUDER, Regina: Problemlösen lernen in der Geometrie (mathematik lehren 196 | 2016)

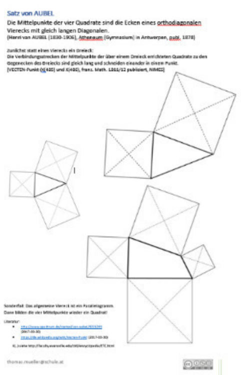
STACHEL, Hellmuth: Kegelschnitte – eine (fast) unendliche Geschichte, in ÖMG-Didaktikhefte, Band 47, 81 – 90, http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2014%20Band%2047/VortragStachel.pdf

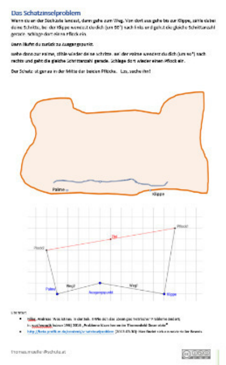
Anhang: Arbeitsblätter zu

1: Satz von VARIGNON | 2: Vom Punkt von FERMAT zum Satz von AUBEL | Das Schatzinselproblem





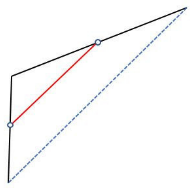


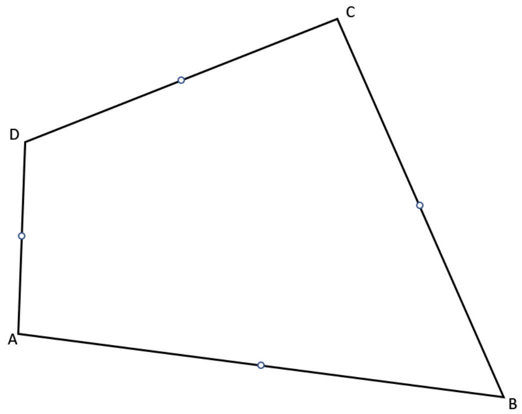


Der Satz von VARIGNON

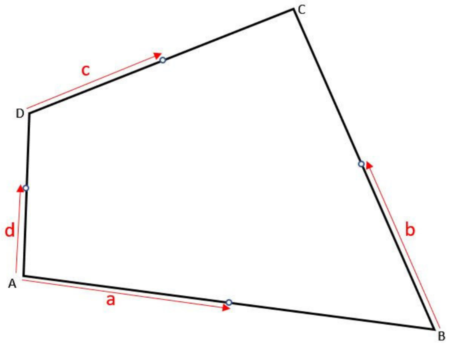
Bei jedem allgemeinen Viereck sind die Mittelpunkte der vier Seiten Eckpunkte eines Parallelogramms. (Pierre VARIGNON (1654 -1722, Paris)

Zurückführen auf Bekanntes (1. Strahlensatz, Umkehrung)



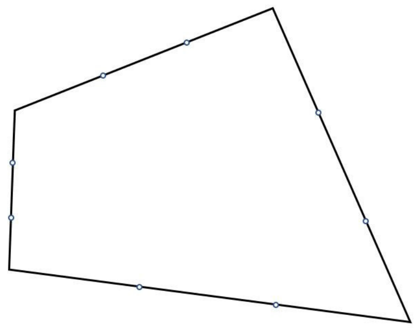


Einsatz von Vektorrechnung

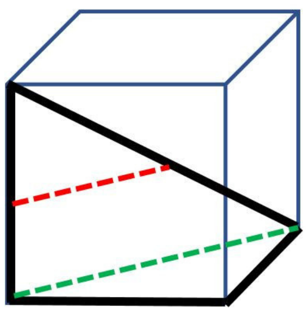


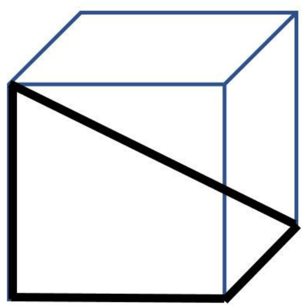
Verallgemeinerung 1: Seiten dritteln

Ferdinand WITTENBAUER (1857 – 1922, Graz)



Verallgemeinerung 2: Viereck im R3





Gilt die WITTENBAUER-Verallgemeinerung auch im Raum?

Literatur:

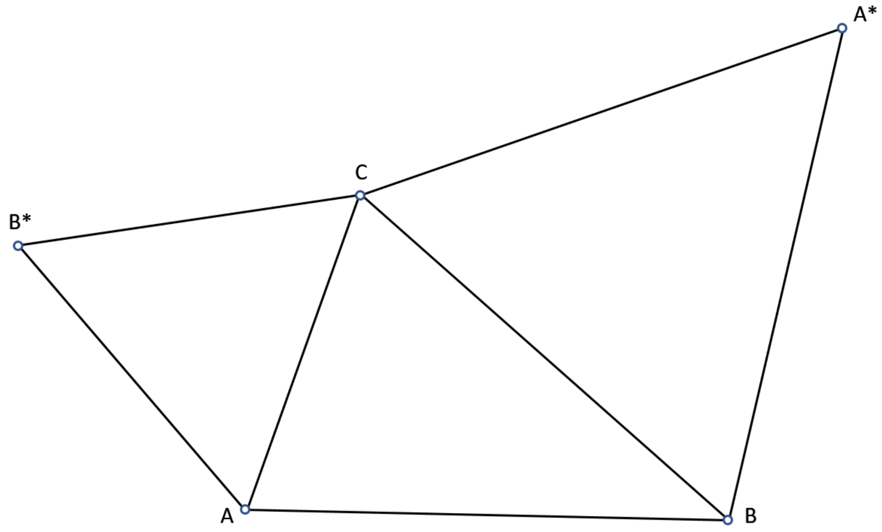
- https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Varignon (2017-03-30)
- https://de.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_Wittenbauer (2017-03-30)

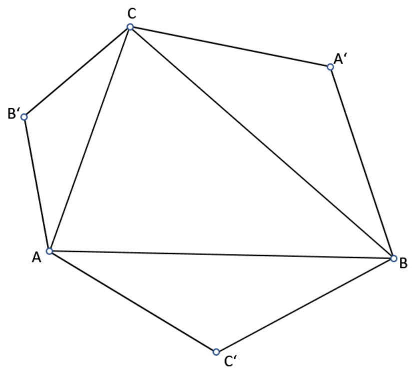
thomas.mueller@schule.at

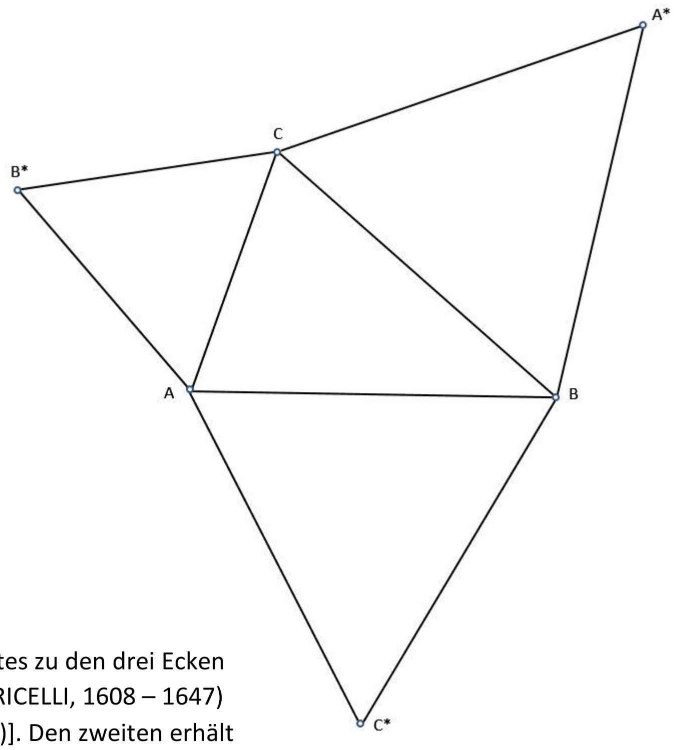
Punkt von FERMAT

Über allen drei Seiten eines beliebigen Dreiecks werden gleichseitige Dreiecke errichtet. Die jeweils von einem Eckpunkt zum freien Eckpunkt des über der Gegenseite errichteten gleichseitigen Dreiecks verlaufenden Strecken schneiden einander in einem Punkt und sind gleich lang.

(Pierre de FERMAT, 1601 – 1665)







Übrigens:

- Die Summe der Abstände des FERMAT-Punktes zu den drei Ecken des Dreiecks sind minimal. (Evangelista TORRICELLI, 1608 – 1647)
- Es gibt zwei FERMAT-Punkte [X(13) und X(14)]. Den zweiten erhält man, wenn die gleichseitigen Dreiecke nicht nach außen, sondern nach innen abgetragen werden.
- Verallgemeinernd können statt der gleichseitigen Dreiecke auch zueinander ähnliche gleichschenkelige Dreiecke errichtet werden. Dann schneiden einander die drei Verbindungsstrecken ebenfalls in einem Punkt. [Ludwig KIEPERT, 1846 – 1934, X(115)]

Literatur:

- Schupp, Hans: Elementargeometrie, UTB Schöningh, 1977, p79ff
- https://de.wikipedia.org/wiki/Fermat-Punkt (2017-03-30)

X(..) siehe http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

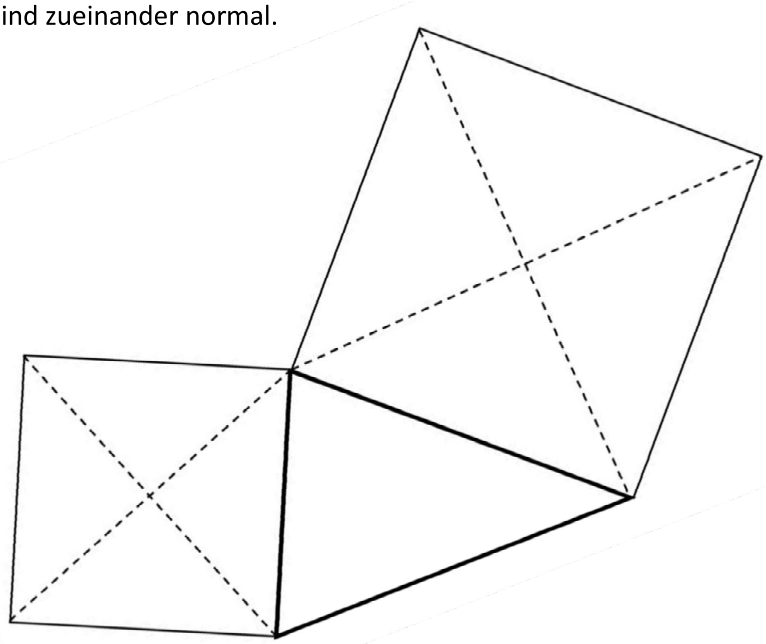
thomas.mueller@schule.at

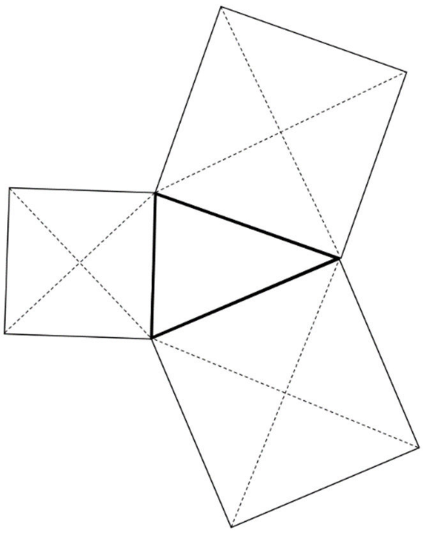
Satz von AUBEL

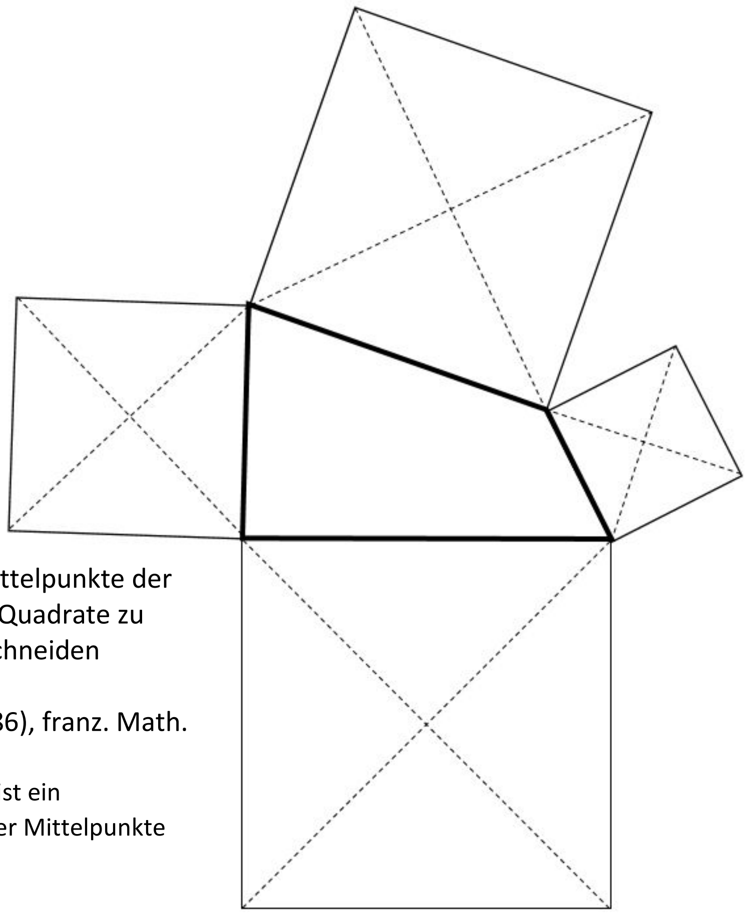
Die Mittelpunkte der vier Quadrate sind die Ecken eines orthodiagonalen Vierecks mit gleich langen Diagonalen.

(Henri van AUBEL (1830-1906), Atheneum (Gymnasium) in Antwerpen, publ. 1878)

Zunächst statt eines Vierecks ein Dreieck:
Die Verbindungsstrecken eines Seitenmittenpunkts des Dreiecks mit den beiden Mittelpunkten der über den Gegenseiten errichteten Quadrate sind zueinander normal.







Übrigens:

- Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte der über einem Dreieck errichteten Quadrate zu den Gegenecken des Dreiecks schneiden einander in einem Punkt.
  [VECTEN-Punkt (X(485) und X(486), franz. Math. 1811/12 publiziert, NIMES]
- Sonderfall: Das allgemeine Viereck ist ein Parallelogramm. Dann bilden die vier Mittelpunkte wieder ein Quadrat!

Literatur:

- http://www.spektrum.de/raetsel/van-aubel/1336241 (2017-03-30)
- https://de.wikipedia.org/wiki/Vecten-Punkt (2017-03-30)

thomas.mueller@schule.at

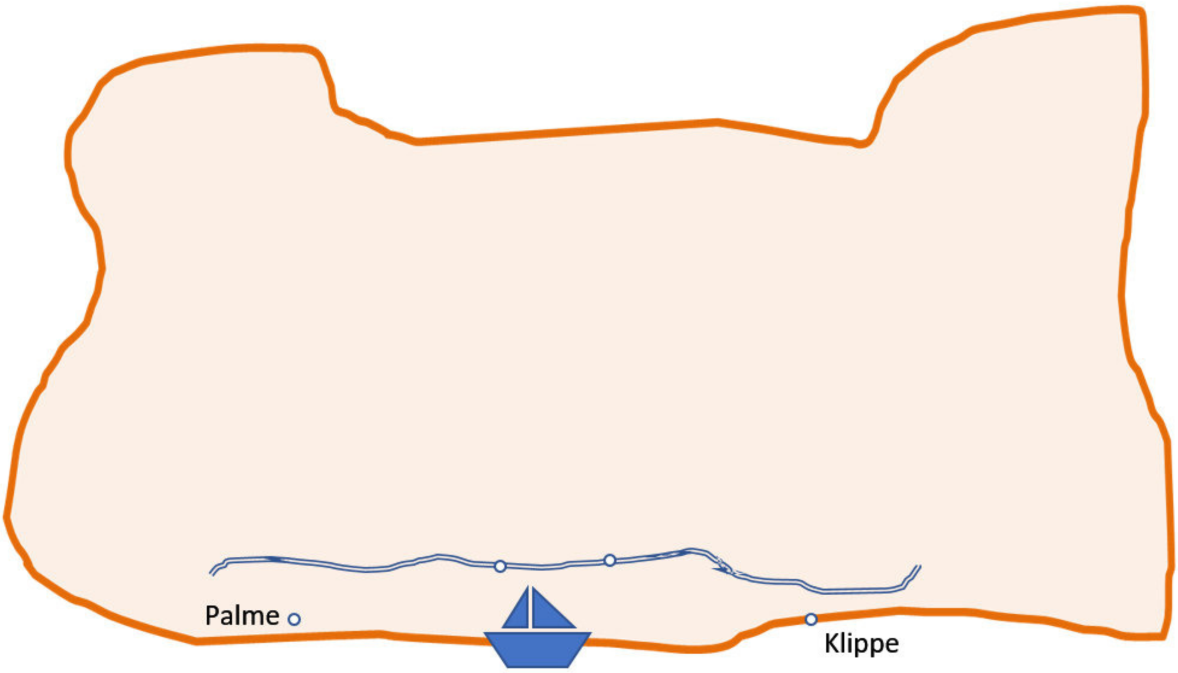
Das Schatzinselproblem

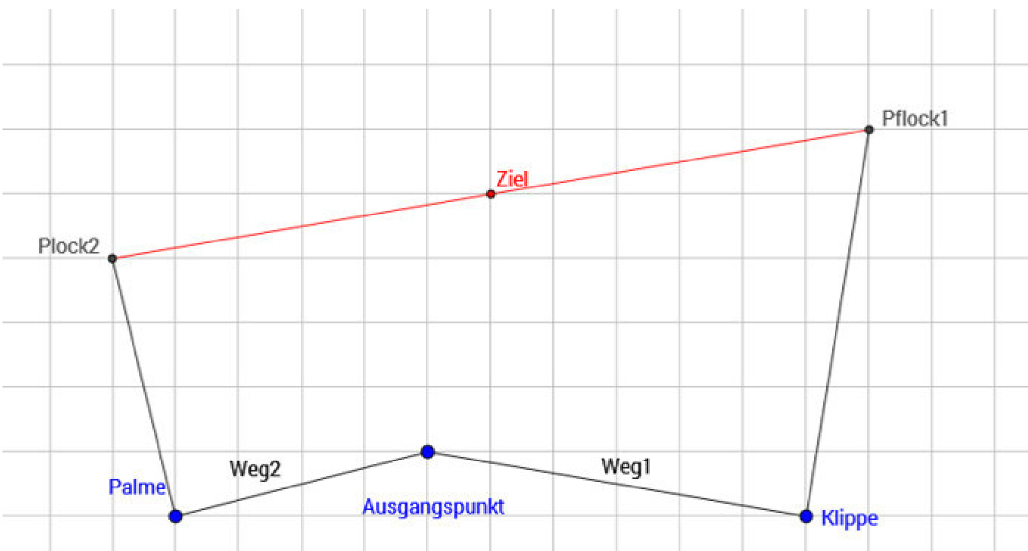
Wenn du an der Südküste landest, dann gehe zum Weg. Von dort aus gehe bis zur Klippe, zähle dabei deine Schritte, bei der Klippe wendest du dich (um 90°) nach links und gehst die gleiche Schrittanzahl gerade. Schlage dort einen Pflock ein.

Dann läufst du zurück zum Ausgangspunkt am Weg.

Gehe dann zur Palme, zähle wieder deine Schritte. Bei der Palme wendest du dich (um 90°) nach rechts und geht die gleiche Schrittanzahl gerade. Schlage dort wieder einen Pflock ein.

Der Schatz ist genau in der Mitte der beiden Pflöcke.   Viel Glück beim Finden!





Literatur:

- Filler, Andreas: Was ist neu in der Sek. II Wie sich das Lösen geometrischer Probleme ändert; in *mathematik lehren* 196| 2016 „Probleme lösen lernen im Themenfeld Geometrie“
- http://beta.proffi-m.de/content/schatzinselproblem (2017-03-30): Hier findet sich ein vektorieller Beweis.

thomas.mueller@schule.at