Bewegliche Oktaeder

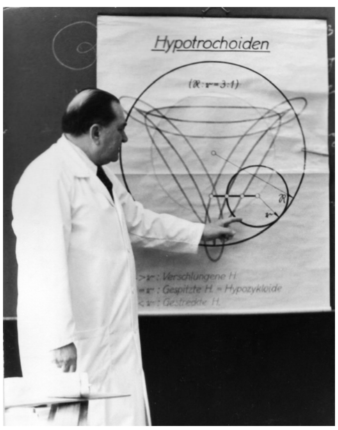
In Erinnerung an unseren Lehrer Walter Wunderlich – gewidmet zum 100. Geburtstag

Von Thomas Müller (Krems) und Ulrike Vanek (Klosterneuburg)

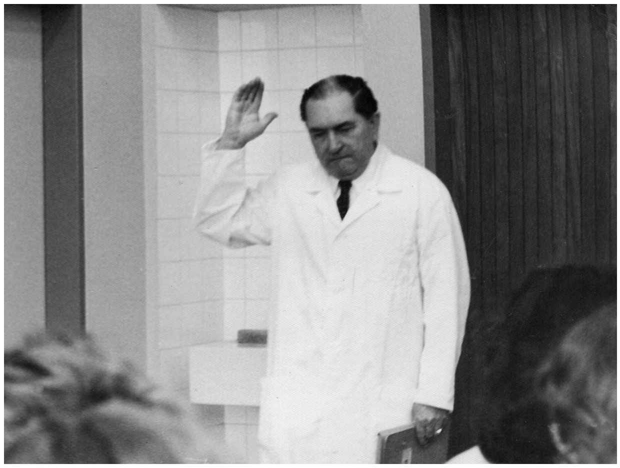
Im Jahre 2010 jährte sich der Geburtstag unseres akademischen Geometrielehrers Walter Wunderlich zum 100. Mal. In Erinnerung an die Begegnungen mit Wunderlich und an unser Studium bei ihm seien die nachfolgenden Gedanken festgehalten. Ausführliche Nachrufe auf Wunderlich finden sich im Internet [STACHEL 1999], ebenso sein komplettes Publikationsverzeichnis. Dieses - derzeit von Günter Wallner aufbereitete und digitalisierte - Verzeichnis weist über 200 Arbeiten auf [WALLNER 2011]. Es reicht inhaltlich von der Geometrie der Vogeleier über seetaktische Verfolgungsaufgaben, zahlreiche kinematischen Fragestellungen bis hin zu Fragen des isotropen und des mehrdimensionalen Raumes. Meist waren konkrete Probleme, die es zu lösen, geometrisch zu beleuchten gab, der Auslöser für seine Aufsätze.

Einige persönliche Vorbemerkungen

Die AutorInnen begannen ihr Lehramtsstudium für Darstellende Geometrie (und Mathematik) an der Technischen Universität Wien im Jahre 1975. Es war jene Zeit, in der es noch zwei Lehrkanzeln/Institute für Geometrie an der Technik gab – das erste Institut leitete Heinrich Brauner[1], das zweite sein Geometrielehrer Walter Wunderlich. Studierende mussten je nach Studienjahrsbeginn bestimmte Lehrveranstaltungen an jedem Institut besuchen und kolloquieren. Wir besuchten zum Beispiel die Darstellende-Geometrie-Veranstaltungen mit den zukünftigen Architekten gemeinsam am Brauner-Institut, die Projektive-Geometrie-Veranstaltungen und die Kinematik gemeinsam mit den Maschinenbaustudierenden am Wunderlichinstitut.



In Erinnerung an Wunderlich denken wir in erster Linie an seine klaren, didaktisch und sprachlich perfekt aufbereiteten Vorlesungen. Wunderlich zog soweit irgendwie vertretbar und möglich die für zukünftige LehrerInnen so wichtigen synthetischen Überlegungs- und Beweismethoden den analytischen vor.



Ein Foto zeigt sein stets pünktliches Betreten des Hörsaals, wenn er in der linken Hand seine Vorbereitungsmappe haltend die rechte Hand kollegial zum Gruß erhob. Am Foto sind Wunderlichs seinerzeit unter Mathematikern üblicher weißer Mantel zu sehen – sein „Vorlesungsdress" – während er die mündlichen Prüfungen durchaus mit schwarzem Anzug abnahm.

Für die mündlichen Prüfungen nahm er sich bei die LehramtskandidatInnen besonders viel Zeit: Eine ganze Stunde saß man Aug in Aug dem Professor beim Couchtisch gegenüber, Wunderlich eine Pfeife rauchend und die ganze Vorlesung – so schien uns – mit uns replizierend.

Das Geometrie-Seminar

Das Studium sah im zweiten Abschnitt das Geometrieseminar vor, das von beiden Geometrieinstituten gemeinsam gestaltet wurden. Zur Zeit unseres Studiums trug abwechselnd ein Brauner-Schüler und Wunderlich-Schüler je 2 mal 2 Stunden zu einem Thema vor. Ein Probevortrag, bei dem man mit dem jeweiligen Professor alleine war, sollte dem Studierenden Sicherheit im

[1] http://www.geometrie.tuwien.ac.at/havlicek/pub/brauner_orig.pdf [2011-11-24]

„öffentlichen" Vortrag geben. Wunderlich beschäftigte sich in den Seminaren immer wieder mit konkreten Anwendungsproblemen der (Darstellenden) Geometrie meist auf Basis der von ihm selbst verfassten Aufsätze.

Zur Zeit unseres „Auftritts" im Seminar - es war Ende der 1970er Jahre, beschäftigte sich Wunderlich mit Trilaterationsproblemen [WUNDERLICH 1977]. Die Entfernungsmessung war technisch so weit fortgeschritten, dass die Trilateration allmählich die Triangulation - also Vermessung hauptsächlich beruhend auf Winkelermittlung - ablöste. Damit ergab sich eine Fülle interessanter „handfester" Probleme, die darauf beruhen, eine Raumsituation nur aufgrund von gemessenen Streckenlängen zu rekonstruieren, z.B. ein allgemeines Oktaeder nur aufgrund der 12 Seitenkantenlängen zu konstruieren. Für näher Interessierte sei auf die Arbeiten von Killian/Meissl sowie Wunderlich verwiesen [KILLIAN/MEISSL 1969].

Damit zusammenhängend begann sich Wunderlich gegen Ende der 1970er Jahre intensiv mit den wackligen, kippenden und beweglichen Strukturen zu beschäftigen – einer Materie, die man auch heute noch in den Unterricht der Oberstufe bei geeigneter Aufbereitung und Unterstützung durch Modelle einflechten kann und die die SchülerInnen durchaus zu faszinieren vermag [MÜLLER1991].

Wunderlichs letzte publizierte Arbeit – erschienen im Jahr 1990 - beschäftigt sich übrigens auch mit Shaky Polyhedra.

Im Folgenden werden bewegliche Oktaederstrukturen vorgestellt, es geht um …

Bricardsche Gelenkoktaeder

In den vorliegenden Zeilen wurde versucht, bewegliche Strukturen so zu vorzustellen, dass es auch SchülerInnen der Oberstufe mit geringen Kenntnissen im Konstruieren in Grund- und Aufriss möglich ist, den Ausführungen zu folgen. Es wurde daher von konkreten Beispielen ausgegangen.

R. Bricard entdeckte im Zuge systematischer Untersuchungen Oktaeder mit endlicher kontinuierlicher Beweglichkeit. Er teilte sie in drei Typen [WUNDERLICH 1965]. Zwei davon werden hier beschrieben und einige Sonderfälle genauer untersucht.

Typ 1: Gelenkoktaeder mit Symmetrieachse

Man denke sich zwei längs einer Seite zusammenhängende Dreiecke A_0, B_0, C_0 und B_0, C_0, A_1 und spiegle diese an einer Geraden a, die A_0 in A_1 überführt. Diese muss eine beliebige Gerade in der Symmetrieebene von A_0 und A_1 sein (Fig.1). Man erhält durch diese Spiegelung die zusammenhängenden Dreiecke A_0, B_1, C_1 und B_1, C_1, A_1. Diese beiden Dreieckspaare haben eine Beweglichkeit vom Freiheitsgrad 2. Wegen der Symmetrie gilt in jeder Lage $B_0C_1=B_1C_0$. Weist man diesen Strecken eine feste Größe zu, so wird die Figur „weniger beweglich" (Freiheitsgrad 1). Man kann daher die Dreiecke A_0, B_0, C_1 und A_1, B_1, C_0 oder A_0, B_1, C_0 und A_1, B_0, C_1 hinzufügen, ohne die Beweglichkeit ganz zu verhindern.

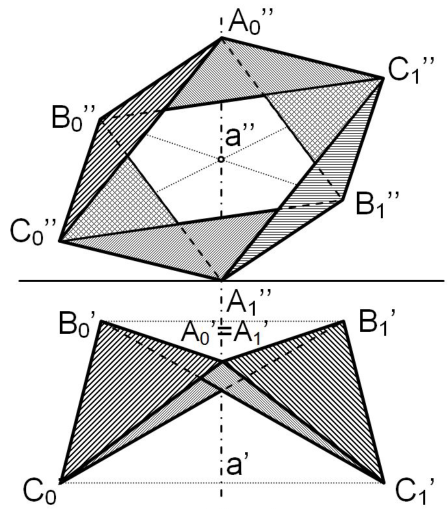


Fig. 1

Typ 2: Gelenkoktaeder mit Symmetrieebene

Man denke sich wieder zwei längs einer Seite zusammenhängende Dreiecke A_0, B_0, C_0 und B_0, C_0, A_1 und spiegle diese an einer Ebene ε, die durch A_0 in A_1 geht (Fig. 2). Man erhält durch diese Spiegelung die zusammenhängenden Dreiecke A_0, B_1, C_1 und B_1, C_1, A_1. Genau wie oben kann man wieder die Dreiecke A_0, B_0, C_1 und A_1, B_1, C_0 oder A_0, B_1, C_0 und A_1, B_0, C_1 hinzufügen, ohne die Beweglichkeit ganz zu verhindern.

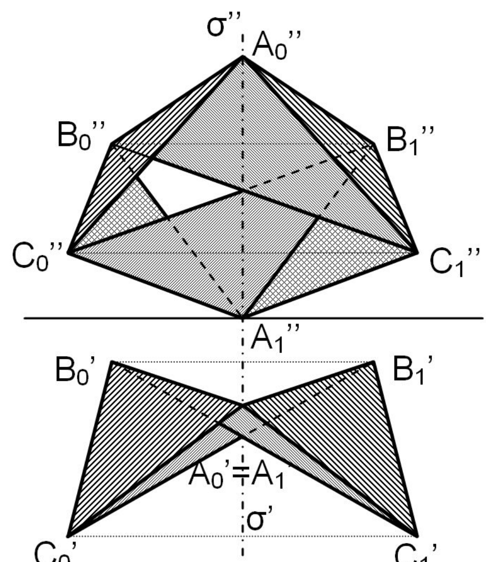


Fig. 2

Sonderfälle:

Wählt man die Punkte B_0 und C_0 in der Symmetrieebene von A_0 und B_0, so erhält man Oktaeder, die sowohl zum Typ eins als auch zum Typ zwei gehören. Es gilt dann auch die Gleichheit folgender Strecken: $A_0B_0=A_1B_0=A_0B_1=A_1B_1$. Analog für A_0C_0. Alle 4 Ausgangsdreiecke sind daher kongruent. Die Sonderfälle sind sowohl vom Typ 1 als auch vom Typ 2. Diese Objekte lassen sich auf zwei Arten zusammenfalten.

Wie darf man die Länge der hinzugefügten Kanten $B_0C_1=B_1C_0$ wählen? Dazu betrachtet man die Grenzlage $A_0=A_1$ (Fig. 3). Man erkennt, dass die Kante B_0C_1 wegen der Dreiecksungleichung kürzer als $A_0B_0+ A_0C_1 = A_0B_0+ A_0C_0$ sein muss. Bei Längengleichheit würde das Dreieck A_0,B_0,C_1 zu einer Strecke entarten und das Oktaeder wäre dann nicht mehr beweglich.

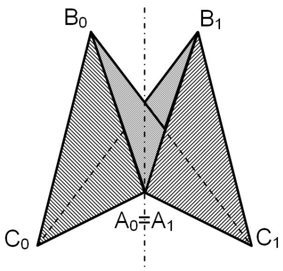


Fig. 3

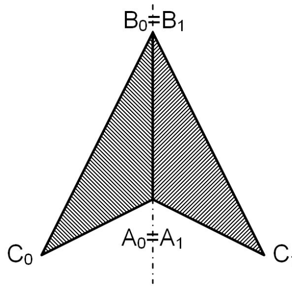


Fig. 4

Wählt man zusätzlich $B_0=B_1$ (Fig.4), so muss die hinzugefügte Kante B_0C_1 genauso lang sein wie B_1C_1. Man erhält dann ein Oktaeder, bei dem eine Hälfte in die andere hineingesteckt ist. Es sieht aus wie eine Pyramide, allerdings ist jedes Manteldreieck doppelt.

Wählt man $B_0C_1 < B_0C_0$, so müssen B_0 und C_0 auf verschiedenen Seiten von σ sein (Fig.5). Die Dreiecke durchdringen dann einander und das Modell ist aus Karton nicht herstellbar.

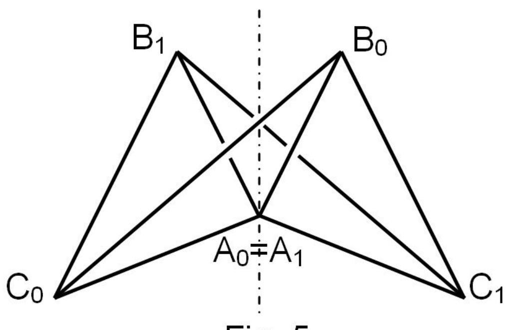


Fig. 5

Es muss für ein Kartonmodell also gelten:

$$B_0C_0 < B_0C_1 < A_0B_0 + A_0C_0$$

Ein besonders hübsches Modell erhält man, wenn man von $B_0=B_1$ ausgeht und alle Dreiecke gleichseitig wählt. Beim Zusammenkleben hilft am besten Fig. 3.

Man kann bei diesem Modell A_0 und A_1 so lange auseinanderziehen, bis C_0 und C_1 zusammenfallen. Mit etwas Geschick kann man aber auch B_0 und B_1 ähnlich wie bei Fig.3 bis zu einer flachen Grenzlage auseinanderziehen. Nach der zweiten Bewegung sieht man die anderen Seiten der Innenflächen. Färbt man geschickt, kann man damit wie bei einem Zauberkunststück die Innenseiten einer Pyramide „umfärben". Fig.6 zeigt das Netz einer solchen „Zauberpyramide mit Farbvorschlag. Die Rückseiten sind wie folgt zu färben:

A_0, B_0, C_0 und A_1, B_0, C_0 Farbe R; A_1,B_1,C_0 und A_1,B_1,C_1 Farbe S; A_1,B_0,C_1 und A_0, B_0, C_1 Farbe T

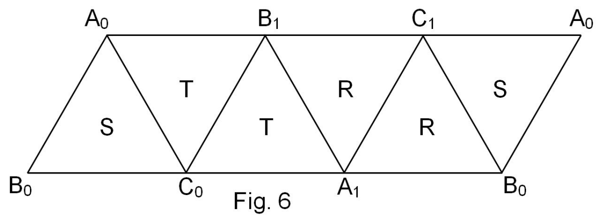


Fig. 6

Tipp zum Falten: Am besten richtet man sich nach Fig. 3.

Literaturverzeichnis

Müller, Thomas: http://www.muel.at/geommod/videos/kippokta.mov [2011130]

Müller, Thomas: Bau von Polyedermodellen aus Trinkhalmen, IBDG, Heft 1, 1991

online unter http://www.muel.at/person/Mueller_1991_IBDG-Heft-1_Gelenkoktaeder.pdf

Stachel, Hellmut: http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/nachruf_wunderlich.pdf , 1999 http://www.geometrie.tuwien.ac.at/former/wunderlich.html [20101130]

Killian, K./Meissl, P.: Einige Grundaufgaben der räumlichen Trilateration und ihre gefährlichen Örter, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Heft 61 , Seiten 65 – 72, 1969

Wallner, Günther: http://sodwana.uni-ak.ac.at/geom/mitarbeiter/wallner/wunderlich/ Werkverzeichnis Wunderlich [20101115]

Wunderlich, W.: Starre, kippende, wackelige und bewegliche Achtflache. Elem. Math. 20, 25–32, 1965

Wunderlich, W.: Untersuchungen zu einem Trilaterationsproblem mit komplanaren Standpunkten, Sitzung der math.-nat. Klasse, Österr. Ak. d. Wiss., 1977